第一章　数列

§1　数列的概念及其函数特性

1.1　数列的概念

对点上分

1. A　【解析】对于 A,数列 4,7,3,4 的第 1 项就是首项,即首项是 4,**故 A 正确.**

对于 B,同一个数在一个数列中可以重复出现,**故 B 错误.**

对于 C,数列和数的顺序有关,而集合中的元素具有无序性,**故 C 错误.**

对于 D,数列是按照确定的顺序排列的一列数,当 a,b 都代表数时,能构成数列,当 a,b 中至少有一个不代表数时,不能构成数列,**故 D 错误.**

故选 A.

2. BC　【解析】数列中的项是有次序的,**故 A 错误;**

根据数列的项数有无限个,可判断数列为无穷数列,**故 B 正确;**

将数列看作函数时,自变量取值是从 1 开始的正整数,故图象为一群孤立的点,**故 C 正确;**

数列的通项公式不是唯一的,如 $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$,$b_n=\cos\frac{(n-1)\pi}{2}$,$n\in\mathbf{N}_+$ 可以表示同一个数列,**故 D 错误.**

故选 BC.

3. D　【解析】$a_6-a_5=6^2+2-(-2)=40.$

故选 D.

4. C　【解析】设该数列为 $\{a_n\}$,因为 $\sqrt{2}=\sqrt{1^3+1}$,$3=\sqrt{2^3+1}$,$2\sqrt{7}=\sqrt{3^3+1}$,$\sqrt{65}=\sqrt{4^3+1}$,…,所以 $a_n=\sqrt{n^3+1}$,令 $\sqrt{n^3+1}=\sqrt{1\ 001}$,解得 $n=10$. **故选 C.**

5. D　【解析】通过观察,该数列的奇数项为负数,偶数项为正数,将数列每一

项取绝对值后,是从 1 开始的奇数,故通项 $a_n=(-1)^n\cdot(2n-1)$. **故选 D.**

6. A 【解析】因为 $1=\frac{2}{2}=\frac{1+1}{2}$,$\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2^2}$,$\frac{1}{2}=\frac{4}{8}=\frac{3+1}{2^3}$,$\frac{5}{16}=\frac{4+1}{2^4}$,所以该数列的一个通项公式可以是 $a_n=\frac{n+1}{2^n}$.

快解 对于选项 B:$a_2=\frac{2+3}{2^{2+1}}=\frac{5}{8}\neq\frac{3}{4}$,**故 B 错误;**

对于选项 C:$a_3=\frac{3+1}{2\times3}=\frac{2}{3}\neq\frac{1}{2}$,**故 C 错误;**

对于选项 D:$a_2=\frac{2+3}{4\times2}=\frac{5}{8}\neq\frac{3}{4}$,**故 D 错误**.通过排除法,**故选 A.**

7. C 【解析】由已知得 $a_1=1$,$a_2=5=a_1+4=a_1+3\times2-2$,$a_3=12=a_2+7=a_2+3\times3-2$,$a_4=22=a_3+10=a_3+3\times4-2$,…,所以 $a_n=a_{n-1}+3n-2$,$n\geqslant2$,所以 $a_5=a_4+13=35$,$a_6=a_5+16=51$,$a_7=a_6+19=70$,$a_8=a_7+22=92$. **故选 C.**

8. D

攻略上分 本题通过整理可以得到$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$的形式,利用通法攻略 1 中的累乘法,可以求得$\{a_n\}$的通项公式,进而求 $a_{2\,024}$ 的值.

【解析】由已知得$(a_{n+1}+a_n)[(n+1)a_{n+1}-na_n]=0$.

因为 $a_n>0$,所以$(n+1)a_{n+1}-na_n=0$,

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$,所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n}$,$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n-2}{n-1}$,$\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}=\frac{n-3}{n-2}$,…,$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$,$n\geqslant2$,

所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\times1=$

$\frac{1}{n}(n\geqslant 2)$.

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 满足该式，所以 $a_n=\frac{1}{n}$. 所以 $a_{2\,024}=\frac{1}{2\,024}$.

故选 D.

一题多解 由已知得 $(a_{n+1}+a_n)[(n+1)a_{n+1}-na_n]=0$.

因为 $a_n>0$，所以 $(n+1)a_{n+1}-na_n=0$，

所以 $(n+1)a_{n+1}=na_n$，

所以数列 $\{na_n\}$ 为常数列，所以当 $n=1$ 时，$na_n=1\times a_1=1$，

所以 $a_n=\frac{1}{n}$，所以 $a_{2\,024}=\frac{1}{2\,024}$.

9. B

攻略上分 本题通过整理可以得到 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=f(n)$ 的形式，利用通法攻略 1 中的累加法，可以求得 $\{a_n\}$ 的通项公式，进而求 a_{22} 的值.

【解析】 因为 $a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n+\frac{2}{n}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$，所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n(n+1)}$，即

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

所以 $\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=2\left(1-\frac{1}{2}\right)$，$\frac{a_3}{3}-\frac{a_2}{2}=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$，$\frac{a_4}{4}-\frac{a_3}{3}=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$，…，

$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)(n\geqslant 2)$.

累加得 $\frac{a_n}{n}-\frac{a_1}{1}=2\left(1-\frac{1}{n}\right)(n\geqslant 2)$，

又 $a_1=-1$，所以 $\frac{a_n}{n}=1-\frac{2}{n}(n\geqslant 2)$，即 $a_n=n-2(n\geqslant 2)$.

当 $n=1$ 时，$a_1=-1$ 也符合上式，所以 $a_n=n-2(n\in\mathbf{N}_+)$，

则 $a_{22}=22-2=20$. **故选 B.**

1.2　数列的函数特性

对点上分

1. ABD

攻略上分　本题利用通法攻略 2 中的作差法、函数法，判断数列的单调性即可.

【解析】对于 A，$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}>0$，

提示：作差法

所以 $a_{n+1}>a_n$，$\{a_n\}$ 为递增数列，

故 A 正确；

对于 B，$a_{n+1}-a_n=2(n+1)-1-2n+1=2$，所以 $a_{n+1}>a_n$，$\{a_n\}$ 为递增数列，**故 B 正确；**

因为 $a_n=n^2-3n$ 对应的函数为 $f(x)=x^2-3x$，$f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=\frac{3}{2}$，根据二次函数的性质，可知 $n\in\mathbf{N}_+$ 时，$f(x)$ 不单调，所以 $\{a_n\}$ 不是递增数列，**故 C 错误；**

另解：因为 $a_1=-2$，$a_2=-2$，所以 $\{a_n\}$ 不是递增数列

对于 D，$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}-2^n=2^n>0$，所以 $a_{n+1}>a_n$，$\{a_n\}$ 为递增数列，**故 D 正确.**

故选 ABD.

2. C　【解析】由数列 $\{c_n\}$ 是递增数列，

得 $\begin{cases}3-a>0,\\ a>1,\\ 10(3-a)-4<a^{11-9}+2,\end{cases}$ 解得 $2<a<3$，

所以 a 的取值范围是 $(2,3)$. **故选 C.**

易错警示　数列是自变量为离散的数的函数. 在处理分段函数反解参数的问题时，注意函数是不连续的. 就本题而言是 $a_{10}<a_{11}$，而不是同时将 10 代入，上一段的函数值小于下一段的函数值.

3. D

攻略上分 本题利用通法攻略2中解不等式组的方法，找到数列中的最小项.

【解析】因为 $a_n=n+\dfrac{2\ 025}{n+1}$，所以 $a_1=1+\dfrac{2\ 025}{2}$，$a_2=2+\dfrac{2\ 025}{3}$，所以 $a_1>a_2$.

假设数列 $\{a_n\}$ 的第 k 项最小，$2\leqslant k\leqslant 50$，$k\in\mathbf{N}_+$，则 $\begin{cases}a_k\leqslant a_{k+1},\\ a_k\leqslant a_{k-1},\end{cases}$

故 $\begin{cases}k+\dfrac{2\ 025}{k+1}\leqslant k+1+\dfrac{2\ 025}{k+2},\\ k+\dfrac{2\ 025}{k+1}\leqslant k-1+\dfrac{2\ 025}{k},\end{cases}$

所以 $\begin{cases}2\ 025\leqslant(k+1)(k+2),\\ k(k+1)\leqslant 2\ 025,\end{cases}$

解得 $k=44$，即数列 $\{a_n\}$ 的前50项中最小项是 a_{44}，**故选 D.**

4. BCD

攻略上分 本题利用通法攻略2中的作商法，判断数列的单调性，并通过单调性来确定数列的最大项.

【解析】选项 A，当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，$a_n=n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，则 $a_1=a_2=\dfrac{1}{2}$，所以数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列，**故 A 错误.**

选项 B，当 $\dfrac{1}{2}<k<1$ 时，$a_n>0$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)\cdot k^{n+1}}{n\cdot k^n}=\dfrac{(n+1)k}{n}$，由 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)k}{n}\geqslant 1$，得 $n\leqslant\dfrac{k}{1-k}$，由 $\dfrac{1}{2}<k<1$，得 $\dfrac{k}{1-k}=\dfrac{1}{1-k}-1>1$，所以当 $n\leqslant\dfrac{k}{1-k}$ 时，$a_{n+1}\geqslant a_n$，当 $n>\dfrac{k}{1-k}$ 时，$a_{n+1}<a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 一定有最大项，**故 B 正确.**

选项 C，当 $0<k<\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)k}{n}<\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\leqslant 1$，则 $a_{n+1}<a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，**故 C 正确.**

选项 D，因为 $\frac{k}{1-k}$ 为正整数，$0<k<1$，所以 $k \geqslant 1-k$，故 $\frac{1}{2} \leqslant k<1$.

当 $k=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \leqslant 1$，当且仅当 $n=1$ 时等号成立，

所以 $a_1=a_2>a_3>a_4>\cdots$，此时 a_1, a_2 为数列 $\{a_n\}$ 的最大项.

当 $\frac{1}{2}<k<1$ 时，由选项 B 知数列 $\{a_n\}$ 一定有最大项，且 $\frac{k}{1-k}>1$.

令 $\frac{k}{1-k}=m(m>1, m \in \mathbf{N}_+)$，则 $k=\frac{m}{1+m}$，

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)k}{n}=\frac{(n+1)m}{n(1+m)}$，

当 $n=m$ 时，$a_{m+1}=a_m$，

由选项 B 知，当 $n \leqslant \frac{k}{1-k}=m$ 时，$a_{n+1} \geqslant a_n$，当 $n>\frac{k}{1-k}=m$ 时，$a_{n+1}<a_n$，

所以 a_m, a_{m+1} 为数列 $\{a_n\}$ 的最大项.

综上，数列 $\{a_n\}$ 必有两项相等的最大项，**故 D 正确. 故选 BCD.**

5. B 【解析】因为 $a_{n+1}=\frac{3}{a_n}$ 且 $a_1=3$，所以 $a_2=1, a_3=3, a_4=1, \cdots$，故数列 $\{a_n\}$ 为周期为 2 的数列，$a_{2\,024}+a_{2\,025}=a_2+a_3=1+3=4$. **故选 B.**

一题多解 因为 $a_{n+2}=\frac{3}{a_{n+1}}=\frac{3}{\frac{3}{a_n}}=a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 为周期为 2 的数列，故 $a_{2\,024}+a_{2\,025}=a_2+a_3=1+3=4$. **故选 B.**

6. B 【解析】因为 $a_1=1, a_2=2$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n \in \mathbf{N}_+)$，所以 $a_3=a_2-a_1=1$，$a_4=a_3-a_2=-1$，$a_5=a_4-a_3=-2$，$a_6=a_5-a_4=-1$，$a_7=a_6-a_5=1$，$a_8=a_7-a_6=2, \cdots$，所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的数列，故 $a_{2\,025}=a_3=1$. **故选 B.**

一题多解 因为 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，所以 $a_{n+6}=a_{n+5}-a_{n+4}=(a_{n+4}-a_{n+3})-a_{n+4}=-a_{n+3}=-(a_{n+2}-a_{n+1})=-[(a_{n+1}-a_n)-a_{n+1}]=a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的数列，所以 $a_{2\,025}=a_3=a_2-a_1=1$. 故选 B.

7. $\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $a_{n+4}=\sin\left[\frac{(n+4)\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2\pi+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=a_n$，

所以 $\{a_n\}$ 是以 4 为周期的数列.

因为 $a_1=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

$a_2=\sin\left(\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$a_3=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，

$a_4=\sin\left(\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$. 所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{985}=246(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_{985}=0+a_1=\frac{1}{2}$.

8. 4 747 【解析】当 $a_1=5$ 时，$a_2=16$，$a_3=8$，$a_4=4$，$a_5=2$，$a_6=1$，$a_7=4$，$a_8=2$，$a_9=1$，…，

易错：注意是 a_n 的奇偶性不同，容易误解成 n 的奇偶性不同

则数列 $\{a_n\}$ 去掉前 3 项后是周期数列，其周期为 3，又 $(2\,025-3)\div3=674$，故此数列前 2 025 项的和为 $5+16+8+(4+2+1)\times674=4\,747$.

§2 等差数列

2.1 等差数列的概念及其通项公式

对点上分

1. ABD

攻略上分 判断数列是否为等差数列，可通过通法攻略 3 中的定义法来判断.

【解析】根据等差数列的定义可得，

A 中，满足 $4-1=7-4=10-7=3$（常数），所以是等差数列；

B 中，满足 $\lg 4-\lg 2=\lg 8-\lg 4=\lg 16-\lg 8=\lg 2$（常数），所以是等差数列；

C 中，因为 $2^4-2^5=-16, 2^3-2^4=-8$，不满足等差数列的定义，所以不是等差数列；

D 中，满足 $8-10=6-8=4-6=2-4=-2$（常数），所以是等差数列.

故选 ABD.

2. B

攻略上分 利用通法攻略 3 中的通项公式法，观察哪个选项符合 $a_n=pn+q$（p,q 为常数）的形式即可判断.

【解析】根据等差数列的通项 $a_n=pn+q$（p,q 为常数）可知，只有 B 选项 $a_n=2n+2$ 符合，**故选** B.

3. D 【解析】当数列 $\{a_n\}$ 为等差数列且为常数列时，$a_6-a_5=\frac{3}{2}$ 不成立；若数列中只有有限项满足后一项减去前一项等于同一个常数，则不能判断数列是等差数列，例如当 $a_4=1, a_5=1, a_6=\frac{5}{2}$ 时，“$a_6-a_5=\frac{3}{2}$”成立，但数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列. 所以“$a_6-a_5=\frac{3}{2}$”是“数列 $\{a_n\}$ 为等差数列”的既不充分也不必要条件. **故选** D.

4. C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $a_5=3$，$a_9=15$，所以 $\begin{cases}a_1+4d=3,\\a_1+8d=15,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-9,\\d=3,\end{cases}$ 所以 $a_n=-9+3(n-1)=3n-12$，故 $a_6=6$. **故选** C.

一题多解 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d=\frac{a_9-a_5}{9-5}=\frac{15-3}{4}=3$，故 $a_6=a_5+d=3+3=6$，**故选** C.

5. D 【解析】$1=3^0$，则数列中各项的指数分别是 $0,7,14,21,\cdots$，

则指数部分构成首项为 0，公差为 7 的等差数列，设其为 $\{a_n\}$，

则对应指数的通项公式为 $a_n=7n-7$，$n\in\mathbf{N}_+$，由 $7n-7=98$，得 $n=15$，所以 3^{98} 是题设数列的第 15 项.

故选 D.

6. $6n+1$ 【解析】易知数列 $\{2n-1\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，即 1，3，5，7，9，…，

数列 $\{3n+1\}$ 是以 4 为首项，3 为公差的等差数列，即 4，7，10，13，…，

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 7，公差为 6 的等差数列，则 $a_n=7+6(n-1)=6n+1$.

7. $a_n=\dfrac{1}{3n-2}$ 【解析】$\because a_n-a_{n+1}=3a_na_{n+1}$，$a_2=\dfrac{1}{4}$，$\therefore a_1-a_2=3a_1a_2$，即 $a_1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}a_1$，解得 $a_1=1$.

由题意知，$a_n\neq 0$，故由 $a_n-a_{n+1}=3a_na_{n+1}$ 可得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=3$，$\therefore \left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项，3 为公差的等差数列，$\therefore \dfrac{1}{a_n}=1+3(n-1)=3n-2$，故 $a_n=\dfrac{1}{3n-2}$.

8. (1)【证明】由 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}$，得 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}$，又 $\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$，所以数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项、公差均为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列.

(2)【解】由(1)得，$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n}{2}$，则 $a_n=n\cdot 2^{n-1}$，

令 $a_n=n\cdot 2^{n-1}=5\ 120$，解得 $n=10$.

9. C 【解析】由题意知数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq 0$.

充分性：若 $\{a_n\}$ 为递增数列，则 $d>0$，故 $\{a_n\}$ 从某项开始均为正数；

必要性：存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$，若 $d<0$，则从某项开始 $a_n<0$，矛盾，故 $d>0$，$\{a_n\}$ 为递增数列. **故选 C.**

10. 16 【解析】由题意，$a_n=a_1+(n-1)\cdot d=-\dfrac{3}{4}n+\dfrac{47}{4}(n\in\mathbf{N}_+)$，令 $a_n\leqslant$

0，得$-\frac{3}{4}n+\frac{47}{4}\leqslant 0$，解得$n\geqslant\frac{47}{3}=15+\frac{2}{3}$，所以当$n\leqslant 15$时，$a_n>0$，此时$|a_n|$单调递减；当$n>15$时，$a_n<0$，此时$|a_n|$单调递增，又$a_{15}=-\frac{3}{4}\times 15+\frac{47}{4}=\frac{1}{2}$，$a_{16}=-\frac{3}{4}\times 16+\frac{47}{4}=-\frac{1}{4}$，则$|a_{16}|<|a_{15}|$，因此当$|a_n|$最小时，$n=16$.

11. C 【解析】因为三个数$a,2a-1,4$成等差数列，所以$2(2a-1)=a+4$，解得$a=2$. **故选** C.

12. D 【解析】$\because m+2n=8,2m+n=10$，

$\therefore 3m+3n=18$，$\therefore m+n=6$，

$\therefore 2m-n$和$2n-m$的等差中项是$\frac{(2m-n)+(2n-m)}{2}=\frac{m+n}{2}=3$. **故选** D.

13. 【解】(1)由题意得$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)$，

在$\triangle ABC$中，$A+B=\pi-C$，$0<C<\pi$，

所以$\sin(A+B)=\sin C$，所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sin C$，又$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sin 2C$，所以$\sin 2C=\sin C$，则$2\sin C\cos C=\sin C$，又$\sin C\neq 0$，所以$\cos C=\frac{1}{2}$.

又因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由$\sin A,\sin C,\sin B$成等差数列，可得$2\sin C=\sin A+\sin B$，由正弦定理得$2c=a+b$.

因为$\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=18$，所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=18$，即$ab\cos C=18$，所以$ab=36$.

由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab$，所以$c^2=4c^2-3\times 36$，所以$c^2=36$，解得$c=6$(负值舍去).

14. D

攻略上分 根据通法攻略4中等差数列的性质，可快速判断是否为等差数列.

【解析】对于①，数列$\{a_{2n}\}$是数列$\{a_n\}$中的偶数项组成的数列，故$\{a_{2n}\}$是等差数列；

对于②，数列$\{a_n\}$是等差数列，则数列$\{a_{n+1}\}$也是等差数列，故$\{a_n+a_{n+1}\}$是

等差数列；

对于③，数列$\{a_n\}$是等差数列，故$\{3a_n+1\}$是等差数列；

对于④，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等差数列，故$\{a_n+2b_n\}$是等差数列.

所以①②③④均是等差数列，**故选 D.**

15. A

攻略上分 本题可以利用通法攻略 4 中等差数列序号和的性质求解，也可以利用通法攻略 4 中两个等差数列的和仍为等差数列的性质求解.

【解析】因为 $a_2+b_2=7$，$a_8+b_8=11$，所以 $a_2+b_2+a_8+b_8=2a_5+2b_5=7+11=18$，所以 $a_5+b_5=9$，**故选 A.**

一题多解 因为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为等差数列，所以数列$\{a_n+b_n\}$为等差数列，数列$\{a_n+b_n\}$的公差 $d=\dfrac{(a_8+b_8)-(a_2+b_2)}{8-2}=\dfrac{2}{3}$，所以 $a_5+b_5=(a_2+b_2)+3d=7+2=9$. **故选 A.**

16. C

攻略上分 本题数列中下标用字母表示，但通过观察发现，$k-1+k+1=1+2k-1=2k$，因此可以利用通法攻略 4 中序号和的性质，转化为 $a_{k-1}+a_{k+1}=a_1+a_{2k-1}=2a_k$ 进行求解.

【解析】由 $a_k^2-a_{k-1}-a_{k+1}=0$，得 $a_k^2=a_{k-1}+a_{k+1}=2a_k$，解得 $a_k=0$ 或 $a_k=2$，由 $a_1+a_{2k-1}=\dfrac{44}{2k-1}$，得 $2a_k=\dfrac{44}{2k-1}$，即$(2k-1)a_k=22$，显然 $a_k=2$，解得 $k=6$.

17. $\dfrac{3}{2}$

攻略上分 题干中出现三项 a_{11}，a_5，a_{17}，且 $2\times11=5+17$，利用通法攻略 4 中序号和的性质，可以直接得 a_5+a_{17} 的值，即整式是定值，求分式的最值，利用“1”的代换求解.

【解析】$\because$ 在正项等差数列$\{a_n\}$中，

$a_{11}=3$，$\therefore a_5+a_{17}=2a_{11}=6$，

$\therefore \frac{1}{a_5}+\frac{4}{a_{17}}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a_5}+\frac{4}{a_{17}}\right)(a_5+a_{17})=\frac{1}{6}\left(1+4+\frac{a_{17}}{a_5}+\frac{4a_5}{a_{17}}\right)\geqslant\frac{1}{6}\left(1+4+2\sqrt{\frac{a_{17}}{a_5}\cdot\frac{4a_5}{a_{17}}}\right)=\frac{3}{2}$.

当且仅当 $a_{17}=2a_5$，即 $a_5=2$，$a_{17}=4$ 时等号成立.

故 $\frac{1}{a_5}+\frac{4}{a_{17}}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$.

18. B

思路导引 由题意分析出五人所分钱数成等差数列 $\{a_n\}$，钱最多者为 a_1，列出等式 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5$ 和 $a_1+a_2=a_3+a_4+a_5$，根据等差数列的性质即可求出 a_3 和公差 d，再求出 a_5 即可.

【解析】由题意可知五人所分钱数成等差数列 $\{a_n\}$，得钱最多者为 a_1，则公差 $d<0$，所以有 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3=5$，解得 $a_3=1$.

又因为 $a_1+a_2=a_3+a_4+a_5$，即 $2a_3-3d=3a_3+3d$，所以 $d=-\frac{1}{6}$，所以 $a_5=a_3+2d=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，所以分得钱数最少的人得到 $\frac{2}{3}$ 钱. **故选 B.**

19. B 【解析】记这十二个节气的日影长度依次成等差数列 $\{a_n\}$，其中冬至的日影长度为 a_1，

由题意可得，冬至、立春、春分日影长度之和为 $a_1+a_4+a_7=31.5$（尺），

小寒、雨水、清明日影长度之和为 $a_2+a_5+a_8=28.5$（尺），

大寒、惊蛰、谷雨日影长度之和为 $a_3+a_6+a_9$，所以 $a_3+a_6+a_9=2(a_2+a_5+a_8)-(a_1+a_4+a_7)=25.5$（尺）.

故选 B.

能力上分

1. ABD 【解析】A 选项，1，2，3 显然成等差数列，但是 1，4，9 显然不成等差数列，**因此 A 错误；**

B 选项,0,0,0 显然成等差数列,但是 $\log_2 a$, $\log_2 b$, $\log_2 c$ 这三个式子没有意义,**因此 B 错误**;

C 选项,因为 a,b,c 成等差数列,所以 $2b=a+c$,因为 $2(b+2)-(a+2+c+2)=2b-a-c=0$,所以 $a+2,b+2,c+2$ 成等差数列,**因此 C 正确**;

D 选项,令 $a=1,b=2,c=3$,1,2,3 显然成等差数列,但是 $2^a=2,2^b=4,2^c=8$,显然 $2^a,2^b,2^c$ 不成等差数列,**因此 D 错误**.

故选 ABD.

2. D 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由 $a_1+a_2=3$,可得 $2a_1+d=3$.

因为等差数列$\{a_n\}$的各项均为正整数,所以 a_1 和 d 也为正整数,

所以 $a_1=1,d=1$,所以 $a_n=n$.

由 $2+n-1=\dfrac{56}{n}$,可得 $n=7$.

故选 D.

3. B 【解析】记 7 根横梁的长度从上到下依次成等差数列$\{a_n\}(1\leqslant n\leqslant 7,n\in\mathbf{N}_+)$,

由题意得,$a_1+a_2+a_3=\dfrac{3}{2}$,$a_5+a_6+a_7=2$,

$\therefore 3a_2=\dfrac{3}{2}$,$3a_6=2$,$\therefore a_2=\dfrac{1}{2}$,$a_6=\dfrac{2}{3}$.

$\because 2a_4=a_2+a_6$,$\therefore a_4=\dfrac{7}{12}$,即正中间的一根横梁的长度是$\dfrac{7}{12}$ m.

故选 B.

4. C 【解析】依题意,令 $a_m=b_k$,$m,k\in\mathbf{N}_+$,即 $3m-1=4k-3$,整理得 $m=(k-1)+\dfrac{k+1}{3}$,

因此 $k+1$ 是 3 的正整数倍,令 $k+1=3n$,$n\in\mathbf{N}_+$,即 $k=3n-1$,

于是对于数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公共项构成的数列$\{c_n\}$,有 $c_n=b_{3n-1}=4(3n-1)-3=12n-7$.

由 $12n-7\leqslant 2\ 025$,得 $n\leqslant\dfrac{508}{3}$,

所以集合 $A\cap\{n\mid n\leqslant 2\ 025, n\in\mathbf{N}_+\}$ 中元素的个数为 169.

故选 C.

5. B 【解析】由 $\begin{cases}x>0,\\x+1>0,\\x+2>0,\end{cases}$ 解得 $x>0$.

依题意,存在 x 使得 $f(x+1)$,$f(ax)$,$f(x+2)$ 成等差数列,

即存在 x 使得 $2f(ax)=f(x+1)+f(x+2)$,

即存在 x 使得 $2\log_a(ax)=\log_a(x+1)+\log_a(x+2)=\log_a[(x+1)(x+2)]$,

则 $a^2x^2=(x+1)(x+2)$,即 $a^2=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2}=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2}=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x}+1$,

设 $t=\dfrac{1}{x}$,$t>0$,则 $a^2=2t^2+3t+1$,

当 $t\in\mathbf{R}$ 时,函数 $y=2t^2+3t+1$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $t=-\dfrac{3}{4}$,

所以当 $t>0$ 时,函数 $y=2t^2+3t+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

则 $2t^2+3t+1>2\times0^2+3\times0+1=1$,

所以 $a^2>1$,而 $a>0$ 且 $a\neq1$,所以 $a>1$.

故选 B.

6. AC 【解析】对于 A,令 $a_n=a$,由 $a_{n+1}a_n=4a_n-4$,可得 $a^2=4a-4$,解得 $a=2$,所以 $\{a_n\}$ 可能为常数列,A **正确**;

对于 B,当 $a_1=2$ 时,由 $a_{n+1}a_n=4a_n-4$,得 $a_n(a_{n+1}-2)=2(a_n-2)$,则 $a_n=2$,此时 $\dfrac{1}{a_n-2}$ 无意义,

$a_{n+1}a_n=4a_n-4$ 中,若 $a_n=0$,则 $0=-4$,矛盾,故 $a_n\neq0$,

当 $a_1\neq2$ 时,$a_{n+1}=4-\dfrac{4}{a_n}$,则 $\dfrac{1}{a_{n+1}-2}=\dfrac{1}{4-\dfrac{4}{a_n}-2}=\dfrac{1}{2-\dfrac{4}{a_n}}=\dfrac{a_n}{2a_n-4}=\dfrac{1}{a_n-2}+\dfrac{1}{2}$,

即数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-2}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列,B **错误**;

对于 C,$a_1=3$,由选项 B 得等差数列

$\left\{\frac{1}{a_n-2}\right\}$的首项为 1,公差为$\frac{1}{2}$,

则$\frac{1}{a_n-2}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$,故

$\frac{1}{a_{10}-2}=\frac{10+1}{2}=\frac{11}{2}$,则 $a_{10}=\frac{24}{11}$,**C 正确**;

对于 D,若数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为公差不为 0 的

等差数列,则由选项 B 知 $a_n\neq 0$,

由 $a_{n+1}a_n=4a_n-4$,得 $a_{n+1}=4-\frac{4}{a_n}$,

则$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{4-\frac{4}{a_n}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n^2-4a_n+4}{4a_n(a_n-1)}$不

会是非零常数,**D 错误**.

故选 AC.

7. 2 025 【**解析**】解方程 $x^2-2\ 025x+2\ 024=0$,得 $x=1$ 或 $x=2\ 024$,

又$\{a_n\}$为递减数列,则 $a_1=2\ 024$,$a_{2\ 024}=1$,

数列的公差 $d=\frac{a_{2\ 024}-a_1}{2\ 024-1}=-1$,

所以 $a_{2\ 025}=a_{2\ 024}+d=1-1=0$,故 $n=2\ 025$.

8. $\frac{3}{1\ 015}$ 【**解析**】由$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+2}}$,

得$\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{a_n}=\frac{2}{a_{n+1}}$,又 $a_1=1$,

则数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为 1 的等差数列,

设数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的公差为 $d(d\neq 0)$,则

$\frac{1}{a_n}=1+(n-1)d$,即 $a_n=\frac{1}{dn+1-d}$,

所以 $a_na_{n+1}=\frac{1}{dn+1-d}\cdot\frac{1}{dn+1}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{dn+1-d}-\frac{1}{dn+1}\right)$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}=\frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{dn+1}\right)=\frac{n}{dn+1}$,

由 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_6a_7=3$,得$\frac{6}{6d+1}=3$,

解得 $d=\frac{1}{6}$,因此 $a_n=\frac{6}{n+5}$,

所以 $a_{2\ 025}=\frac{6}{2\ 025+5}=\frac{3}{1\ 015}$.

9. 思路导引 (1)根据题意可得 $a_n=8n-6$,设 a_n,a_{n+1} 插入的 3 项为 t_{n1},t_{n2},t_{n3},由等差数列的性质可得 $c_n=3t_{n2}=24n-6$,结合等差数列的定义判断是否为等差数列;
(2)根据题意可知数列$\{b_n\}$是首项为 $b_1=a_1=2$,公差为$\frac{d}{4}=2$的等差数列,即可得 $b_n=2n$,再结合$\{a_n\}$与$\{c_n\}$的通项公式,表示出 b_n.

【解】(1)由题意可知 $a_n=2+8(n-1)=8n-6$,设 a_n,a_{n+1} 之间插入的 3 项为 t_{n1},t_{n2},t_{n3},因为 $a_n,t_{n1},t_{n2},t_{n3},a_{n+1}$ 为等差数列,所以 $t_{n2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}=\frac{(8n-6)+(8n+2)}{2}=8n-2$,可得 $c_n=t_{n1}+t_{n2}+t_{n3}=3t_{n2}=24n-6$,因为 $c_{n+1}-c_n=(24n+18)-(24n-6)=24$,且 $c_1=18$,所以数列$\{c_n\}$是以 18 为首项,24 为公差的等差数列,且 $c_n=24n-6$.
(2)由题意可知,数列$\{b_n\}$是首项为 $b_1=a_1=2$,公差为$\frac{d}{4}=2$的等差数列,得 $b_n=2+(n-1)2=2n$,由(1)知 $a_n=8n-6$,$c_n=24n-6$,所以 $b_n=\frac{1}{8}(c_n-a_n)$.

2.2 等差数列的前 n 项和

课时 1 等差数列的前 n 项和(1)

对点上分

1. C 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

由题意得$\begin{cases}a_1+d=4,\\5a_1+10d=3a_1+9d+6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=2,\end{cases}$所以 $a_8=a_1+7d=16$. **故选 C.**

2. A 【解析】根据题意得 $\begin{cases}2a_1+\dfrac{2\times1}{2}d=4,\\3a_1+\dfrac{3\times2}{2}d=12,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a_1+d=4,\\3a_1+3d=12,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=0,\\d=4.\end{cases}$ 故选 A.

3. 50 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，利用等差中项的性质可知 $2a_3=a_2+a_4=0$，即 $a_3=0$，

由等差数列的通项公式可得 $2a_2+a_6=2(a_3-d)+(a_3+3d)=-2d+3d=d=2$，

所以 $a_1=a_3-2d=-4$，

则 $S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=-40+90=50.$

4. 【解】由题知 $b_n=-2n+21$，令 $b_n=0$，解得 $n=\dfrac{21}{2}$，又 $n\in\mathbf{N}_+$，所以当 $n\leqslant10$ 时，$b_n>0$，当 $n\geqslant11$ 时，$b_n<0$.

当 $n\leqslant10$ 时，$T_n=S_n=\dfrac{n(b_1+b_n)}{2}=-n^2+20n$；

当 $n\geqslant11$ 时，$T_n=|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_{10}|+|b_{11}|+|b_{12}|+\cdots+|b_n|$

$=b_1+b_2+\cdots+b_{10}-(b_{11}+b_{12}+\cdots+b_n)$

$=S_{10}-(S_n-S_{10})=-S_n+2S_{10}$

$=-(-n^2+20n)+2\times(-10^2+20\times10)$

$=n^2-20n+200.$

综上所述，$T_n=\begin{cases}-n^2+20n(n\leqslant10),\\n^2-20n+200(n\geqslant11),\end{cases}$ $n\in\mathbf{N}_+$.

所以 $T_{12}=12^2-20\times12+200=104.$

易错警示 当等差数列中同时存在正项和负项时，若要求等差数列绝对值的前 n 项和，则需要先找到此等差数列的项在何时符号发生变化，再分别利用等差数列求和公式求解，如果整体运用求和公式，会导致结果出错.

5. A

攻略上分 本题中的等差数列有偶数项，根据等差数列前 n 项和的性质可求得公差 d 及 a_5 与 a_6 的关系，用 a_5 表示 a_6 即可求得 a_6 的值.

【解析】设等差数列的公差为 d，根据等差数列前 n 项和的性质，可得 $15-\frac{25}{2}=5d$，且 $\frac{a_6}{a_5}=\frac{15}{\frac{25}{2}}=\frac{6}{5}$，解得 $d=\frac{1}{2}$，

故 $a_6=\frac{6}{5}(a_6-d)$，解得 $a_6=3$. **故选** A.

一题多解 设等差数列的公差为 d，根据奇数项的和为 $\frac{25}{2}$，偶数项的和为 15，

得 $5a_1+20d=\frac{25}{2}$，$5a_1+25d=15$，

解得 $a_1=\frac{1}{2}$，$d=\frac{1}{2}$，所以 $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n}{2}$，

故这个数列的第 6 项是 3. **故选** A.

6. A

攻略上分 本题所求的是数列前 100 项中的奇数项和，可利用通法攻略 5 中等差数列奇偶项和性质求解.

【解析】设 $P=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{97}+a_{99}$，$Q=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{98}+a_{100}$，

因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差 $d=\frac{1}{2}$，$S_{100}=145$，

所以 $\begin{cases}Q+P=S_{100}=145,\\Q-P=50d=25,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}P=60,\\Q=85,\end{cases}$ 所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{97}+a_{99}=60$.

故选 A.

7. A

攻略上分 可利用通法攻略 5 中等差数列片段和性质求解.

【解析】由题意可得 $S_3=6, S_6=3$,

由等差数列片段和性质可知 S_3, S_6-S_3, S_9-S_6 成等差数列,

所以 $2(S_6-S_3)=S_3+S_9-S_6$,所以 $S_9=3S_6-3S_3=3\times3-3\times6=-9$.

故选 A.

8. B

攻略上分 题目中已知 $\frac{S_8}{8}-\frac{S_6}{6}=2$,可用通法攻略 5 中的性质求解.

【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也为等差数列,设数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 d',则 $\frac{S_8}{8}-\frac{S_6}{6}=2=2d'$,解得 $d'=1$,又因为 $\frac{S_1}{1}=a_1=1$,所以 $\frac{S_n}{n}=1+n-1=n$,所以 $S_n=n^2$,所以 $S_{10}=100$. **故选** B.

9. A

攻略上分 利用通法攻略 5 中两个等差数列和比与项比性质求解.

【解析】因为等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n,

所以 $\frac{a_6}{b_6}=\frac{\frac{a_1+a_{11}}{2}}{\frac{b_1+b_{11}}{2}}=\frac{\frac{11(a_1+a_{11})}{2}}{\frac{11(b_1+b_{11})}{2}}=\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{33}{22+8}=\frac{11}{10}$. **故选** A.

快解 已知 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n}{2n+8}$,由和比与项比性质得 $\frac{a_6}{b_6}=\frac{3\times(2\times6-1)}{2\times(2\times6-1)+8}=\frac{11}{10}$.

故选 A.

10. 4

攻略上分 利用通法攻略 5 中两个等差数列和比与项比性质求解.

【解析】由题意知$\frac{a_3}{b_5+b_{2\,021}}+\frac{a_{2\,023}}{b_2+b_{2\,024}}=\frac{a_3}{b_3+b_{2\,023}}+\frac{a_{2\,023}}{b_3+b_{2\,023}}=\frac{a_3+a_{2\,023}}{b_3+b_{2\,023}}$，

由$\frac{S_{2\,025}}{T_{2\,025}}=\frac{a_1+a_{2\,025}}{b_1+b_{2\,025}}=\frac{a_3+a_{2\,023}}{b_3+b_{2\,023}}=\frac{3\times2\,025+2\,025}{2\,025}=4$，

得$\frac{a_3}{b_5+b_{2\,021}}+\frac{a_{2\,023}}{b_2+b_{2\,024}}=4$.

快解 $\frac{a_3}{b_5+b_{2\,021}}+\frac{a_{2\,023}}{b_2+b_{2\,024}}$可化简为$\frac{a_{1\,013}}{b_{1\,013}}$，因为$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+2\,025}{n}$，所以$\frac{a_{1\,013}}{b_{1\,013}}=\frac{3\times(2\times1\,013-1)+2\,025}{1\times(2\times1\,013-1)}=4$.

课时2　等差数列的前 n 项和（2）

对点上分

1. C　【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由题知，等差数列的前n项和$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，$S_n$可看成关于$n$的二次函数，易知二次函数的图象经过坐标原点$(0,0)$，

又由$S_{99}=0$可知二次函数图象的对称轴为直线$n=\frac{99}{2}$，所以有$\frac{90+k}{2}=\frac{0+99}{2}$，

解得$k=9$.

故选 C.

2. A　【解析】当$c=0$时，$S_n=an^2+bn$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=a\times1^2+b\times1=a+b$，

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=an^2+bn-a(n-1)^2-b(n-1)=2an+b-a$，

令$n=1$，则$a_1=2a\times1+b-a=a+b$，

故数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2an+b-a$，

因为$a_n-a_{n-1}=2an+b-a-[2a(n-1)+b-a]=2a(n\geqslant2)$，

所以数列$\{a_n\}$是等差数列，

所以“$c=0$”是“$\{a_n\}$为等差数列”的充分条件.

因为$\{a_n\}$为等差数列，设其公差为d，

所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，

所以 $a=\frac{d}{2}$，$b=a_1-\frac{d}{2}$，$c=0$，

所以“$c=0$”是“$\{a_n\}$为等差数列”的必要条件.

综上，“$c=0$”是“$\{a_n\}$为等差数列”的充要条件. **故选 A.**

快解 S_n 所对应的函数为 $y=ax^2+bx+c$，根据等差数列前 n 项和的函数特性，可知 $y=ax^2+bx+c$ 不能有常数项，所以 $c=0$，故“$c=0$”是“$\{a_n\}$为等差数列”的充要条件.

3. ABD 【解析】∵ 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1>0$，公差 $d<0$，S_n 为其前 n 项和，

∴ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，

∴ 点 (n, S_n) 在曲线 $y=\frac{d}{2}x^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)x$ 上，

∵ $d<0$，∴ 二次函数的图象开口向下，

故 A，B 不可能；

∵ 函数图象的对称轴为直线 $x=-\frac{a_1-\frac{d}{2}}{d}>0$，

∴ 对称轴在 y 轴的右侧，**故 C 可能，D 不可能. 故选 ABD.**

4. A

攻略上分 利用通法攻略 6 中邻项变号法，找到 S_n 取到最大值时 n 的取值.

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为 $a_6+a_7+a_8=3$，$S_9=63$，

所以 $a_1+5d+a_1+6d+a_1+7d=3$，$9a_1+36d=63$，联立两式解得 $a_1=19$，$d=-3$.

所以该数列为递减数列，且 $a_7=19-3\times6=1>0$，$a_8=19-3\times7=-2<0$，

所以当 $n=7$ 时，S_n 取得最大值. **故选 A.**

5. B 【解析】由已知可得 $a_1=1, a_2=2$，数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $a_2-a_1=1$，故 $a_n=n$，

故 $S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，

令 $\frac{n(n+1)}{2}<888, n\in\mathbf{N}_+$，得 $n\leqslant 41$，故 n 的最大值为 41.

故选 B.

6. 5 或 6

攻略上分 利用已知条件判断并求出等差数列的前 n 项和 S_n，可以利用通法攻略 6 中的二次函数法或邻项变号法求解 S_n 在何时取得最大值.

【解析】因为 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$，所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设其公差为 d，

因为 $a_1=10$，$a_7=-2$，所以 $d=\frac{a_7-a_1}{7-1}=-2$，

所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=10n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+11n$，

因为函数 $y=-x^2+11x$ 的图象开口向下，且对称轴为直线 $x=\frac{11}{2}=5.5$，

所以当 S_n 取最大值时，$n=5$ 或 6.

一题多解 因为 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$，所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设其公差为 d，

因为 $a_1=10$，$a_7=-2$，所以 $d=\frac{a_7-a_1}{7-1}=-2$，

$a_n=a_1+(n-1)d=10-2(n-1)=12-2n$，

则当 $n\leqslant 5$ 时，$a_n>0$；当 $n=6$ 时，$a_6=0$；当 $n\geqslant 7$ 时，$a_n<0$.

所以当 S_n 取最大值时，$n=5$ 或 6.

7. **攻略上分** 本题可利用通法攻略6中的不等式组法，易知 S_1 不是 S_n 的最大值，由 $\begin{cases}S_n \geqslant S_{n+1}, \\ S_n \geqslant S_{n-1},\end{cases} n \geqslant 2$ 即可判断 S_n 何时最大，从而可求解 S_n 的最大值.

【解】(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为 $a_1=7, S_3=15$，

所以 $3a_1+3d=15$，解得 $d=-2$，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=-2n+9$.

(2)由 $a_1=7, d=-2$，得 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=7n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+8n$，易知 S_1 不是 S_n 的最大值，当 $n\geqslant 2$ 时，由 $\begin{cases}S_n \geqslant S_{n+1}, \\ S_n \geqslant S_{n-1},\end{cases}$

即 $\begin{cases}-n^2+8n \geqslant -(n+1)^2+8(n+1), \\ -n^2+8n \geqslant -(n-1)^2+8(n-1),\end{cases}$

解得 $\frac{7}{2}\leqslant n\leqslant\frac{9}{2}$，又 $n\in\mathbf{N}_+$，因此当 $n=4$ 时，S_n 取最大值，最大值为 $S_4=16$.

8. C 【解析】设二二数之剩一，三三数之剩一的数分别为 $2m+1, 3k+1$ $(m,k\in\mathbf{N}_+)$，

因此数列 $\{a_n\}$ 的项即为以上两类数的公共项 $6n+1$，

即 $a_n=6n+1(n\in\mathbf{N}_+)$，

而 $a_{n+1}-a_n=(6n+7)-(6n+1)=6$，则数列 $\{a_n\}$ 是公差为6的等差数列，

于是 $S_n=\frac{n(7+6n+1)}{2}=3n^2+4n$，则 $\frac{2S_n+a_n+23}{n}=\frac{6n^2+14n+24}{n}=6\left(n+\frac{4}{n}\right)+14$，

又对勾函数 $y=x+\frac{4}{x}$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $n=2$ 时，$\frac{2S_n+a_n+23}{n}$ 取得最小值38. **故选** C.

9. B 【解析】首付 11 万元,余款 14 万元,按题意可知是分 7 次还清.

设每次还款钱数组成数列 $\{a_n\}$,

则 $a_1=2+14\times10\%=3.4$,

$a_2=2+(14-2)\times10\%=3.2$,

$a_3=2+(14-2\times2)\times10\%=3,\cdots$,

$a_n=2+[14-2(n-1)]\times10\%=3.4-0.2(n-1)(n\in\mathbf{N}_+,n\leqslant7)$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3.4,公差为 -0.2 的等差数列,设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,

则 $S_7=7\times3.4+\dfrac{7\times6}{2}\times(-0.2)=19.6$,

因此小明购买这辆车最后实际共付 $11+19.6=30.6$(万元). **故选** B.

能力上分

1. A 【解析】因为 $a_{10}+a_{11}=a_1+a_{20}=-2$,

所以 $\{a_n\}$ 的前 20 项和为 $\dfrac{20(a_1+a_{20})}{2}=-20$. **故选** A.

2. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则 $S_5-S_3=a_5+a_4=a_2+3d+a_2+2d=2a_2+5d=6+5d=16$,解得 $d=2$,

故 $a_4=a_2+2d=3+2\times2=7$,因此,$S_7=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=7\times7=49$. **故选** B.

3. C 【解析】因为 $S_{17}=\dfrac{17(a_1+a_{17})}{2}=17a_9>0$,所以 $a_9>0$,

因为 $a_5+a_{14}=a_9+a_{10}<0$,

所以 $a_{10}<0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_{10}-a_9<0$,

故当 $n\leqslant9$ 时,$a_n>0$,当 $n\geqslant10$ 时,$a_n<0$,

所以当 $n=9$ 时,S_n 取得最大值,即 $\{S_n\}$ 中最大的项是 S_9. **故选** C.

4. C 【解析】已知鬼工球每层与其外相邻一层球面的间距(单位:mm)构成首项为 1,公差为 4 的等差数列.

设该鬼工球的层数为 $n,n\in\mathbf{N}_+$,

因为最外层与最内层的半径之差就是这个等差数列的前$(n-1)$项和,所以$S_{n-1}=190$.

设等差数列的公差为d,

则$a_1=1,d=4,S_{n-1}=190$,所以$n-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\times 4=190$,即$2n^2-5n-187=0$,

解得$n=11$(负值舍去).

所以该鬼工球的层数为11. **故选 C.**

5. ABD 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

因为等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_6=10,S_5=5$,

所以$\begin{cases}a_6=a_1+5d=10,\\S_5=5a_1+10d=5,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-5,\\d=3,\end{cases}$

所以$a_n=-5+(n-1)\times 3=3n-8,S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{13}{2}n.$

对于A,B:等差数列$\{a_n\}$的公差$d=3>0$,所以$\{a_n\}$是递增数列,**故 A,B 正确;**

对于C:由$a_n=3n-8$,得$a_8=3\times 8-8=16$,**故 C 错误;**

对于D:$S_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{13}{2}n=\frac{3}{2}\times\left(n-\frac{13}{6}\right)^2-\frac{169}{24}$,

由二次函数的性质可知,当$n=2$时,S_n最小,**故 D 正确.**

故选 ABD.

6. ABC 【解析】对于A:因为数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均为等差数列,所以$\frac{b_9+b_7}{a_{15}}=\frac{2b_8}{a_{15}}$.

又$(5n+4)T_n=(4n+3)S_n$,

所以$\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n+4}{4n+3}$,

根据等差数列$\{c_n\}$前n项和$C_n=an^2+bn$,可设$S_n=5\lambda n^2+4\lambda n$,$T_n=4\lambda n^2+$

$3\lambda n, \lambda\neq 0$.

对于数列$\{a_n\}$,当$n=1$时,$a_1=9\lambda$,

当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=5\lambda n^2+4\lambda n-[5\lambda(n-1)^2+4\lambda(n-1)]=10\lambda n-\lambda$,

显然当$n=1$时,也满足$a_n=10\lambda n-\lambda$,

故$a_n=10\lambda n-\lambda=\lambda(10n-1)$,

同理可得$b_n=\lambda(8n-1)$,故$\frac{b_9+b_7}{a_{15}}=\frac{2b_8}{a_{15}}=\frac{2\lambda(8\times 8-1)}{\lambda(10\times 15-1)}=\frac{126}{149}$,**故 A 正确.**

对于 B:已知数列$\{a_n\}$为等差数列,设其公差为d,则$S_5=5a_1+10d$,$S_{10}=10a_1+45d$,

又$\frac{S_5}{S_{10}}=\frac{7}{29}$,所以$\frac{5a_1+10d}{10a_1+45d}=\frac{7}{29}$,化简可得$d=3a_1\neq 0$,

则$S_{10}=145a_1$,$S_{20}=20a_1+\frac{20\times(20-1)}{2}\times d=590a_1$,所以$\frac{S_{10}}{S_{20}}=\frac{145a_1}{590a_1}=\frac{29}{118}$,**故 B 正确.**

一题多解 已知$\frac{S_5}{S_{10}}=\frac{7}{29}$,设$S_5=7x$,$x\neq 0$,则$S_{10}=29x$,

$S_5=7x$,$S_{10}-S_5=29x-7x=22x$,$S_{15}-S_{10}=37x$,$S_{20}-S_{15}=52x$成等差数列,

所以$S_{20}=7x+22x+37x+52x=118x$,

$\frac{S_{10}}{S_{20}}=\frac{29x}{118x}=\frac{29}{118}$,**故 B 正确.**

对于 C:因为$a_n=-2n+7$,所以$a_1=5$,

其公差$d=-2$,则$S_n=5n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=5n-n^2+n=-n^2+6n=-(n-3)^2+9$,

所以当$n=3$时,S_n的最大值为9,**故 C 正确.**

对于 D:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$,

由$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\left(a_1+\frac{n}{2}d\right)-$

$\left(a_1+\frac{n-1}{2}d\right)=\frac{1}{2}d$,可得数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列,首项为 2 025,公差为$\frac{1}{2}d$,

由$\frac{S_{12}}{12}-\frac{S_{10}}{10}=2\times\frac{1}{2}d=-2$,解得 $d=-2$,

故$\frac{S_n}{n}=2\ 025+(n-1)\times(-1)=2\ 026-n$,

则 $S_n=n(2\ 026-n)$,故 $S_{2\ 025}=2\ 025\times(2\ 026-2\ 025)=2\ 025$,**故 D 错误.**

故选 ABC.

7.【解】(1)由 $S_{n+1}=S_n+a_n+2$,得 $a_{n+1}-a_n=2$,故$\{a_n\}$为等差数列且公差为 2,

而 $S_2=8$,故 $2a_1+\frac{2\times1}{2}\times2=8$,故 $a_1=3$,

故 $a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$.

(2)由 $b_n=\frac{2n+5}{a_na_{n+1}\cdot2^{n+1}}$,得 $b_n=\frac{2n+5}{(2n+1)(2n+3)2^{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)2^n}-\frac{1}{(2n+3)2^{n+1}}$,

则 $T_n=\frac{1}{3\times2}-\frac{1}{5\times2^2}+\frac{1}{5\times2^2}-\frac{1}{7\times2^3}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)2^n}-\frac{1}{(2n+3)2^{n+1}}=\frac{1}{6}-\frac{1}{(2n+3)2^{n+1}}$,易知 $T_n<\frac{1}{6}$.

§2 节测上分

1. B 【解析】因为 $S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}=\frac{12(a_2+a_{11})}{2}=996$,所以 $a_2+a_{11}=166$.

故选 B.

2. B 【解析】设每层瓷孔数形成等差数列$\{a_n\}$,公差为 d,

则 $a_3=12$,$a_7=28$,所以 $a_7-a_3=4d=16$,解得 $d=4$,所以 $a_1=a_3-2d=12-8=4$,

设等差数列的前 n 项和为 S_n,则 $S_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times4=312$,解得 $n=12$ 或 $n=-13$(舍去),所以这个玲珑瓷的瓷孔总层数为 12. **故选 B.**

3. C 【解析】因为数列$\{a_n\}$是等差数列，所以 $a_2+a_{15}=a_8+a_9>0$，

又 $a_8<0$，所以 $a_9>0$，公差 $d=a_9-a_8>0$，

则数列$\{a_n\}$是递增数列，

故当 $n\leqslant 8$ 时，$\{S_n\}$递减，当 $n\geqslant 9$ 时，$\{S_n\}$递增，

又 $S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8<0$，$S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=8(a_2+a_{15})>0$，

故使不等式 $S_n<0$ 成立的最大的 n 的值为 15. **故选** C.

4. C 【解析】已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=0$，$a_{n+1}=a_n+2\sqrt{a_n+1}+1$，则 $a_{n+1}+1=a_n+1+2\sqrt{a_n+1}+1$，

整理得 $(\sqrt{a_{n+1}+1})^2=(\sqrt{a_n+1}+1)^2$，

解得 $\sqrt{a_{n+1}+1}=\sqrt{a_n+1}+1$（舍负），

即 $\sqrt{a_{n+1}+1}-\sqrt{a_n+1}=1$（常数），

所以数列$\{\sqrt{a_n+1}\}$是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，

则 $\sqrt{a_n+1}=1+(n-1)=n$，整理得 $a_n=n^2-1$，所以 $a_8=64-1=63$. **故选** C.

5. D 【解析】由题意，当 $a>b>0$ 时，有 $b<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<a$，若能构成公差为 d 的等差数列，

则 $a+b=\sqrt{ab}+\frac{a+b}{2}$，即 $\sqrt{ab}=\frac{a+b}{2}$，这与 $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$ 矛盾，则此时不能构成等差数列；

当 $b<a<0$ 时，有 $b<\frac{a+b}{2}<a<\sqrt{ab}$，若能构成公差为 d 的等差数列，

则 $b+\sqrt{ab}=a+\frac{a+b}{2}$，整理得 $(9a-b)(a-b)=0$，解得 $b=9a$ 或 $b=a$（舍去），

此时 $|d|=\frac{|a-b|}{2}=\frac{|a-9a|}{2}=4|a|$，**故选** D.

6. A 【解析】由题中条件得 $a_1=-2-a_2=-7$，当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$a_n+a_{n+1}=-2$，$a_{n+1}+a_{n+2}=2$，两式相减得 $a_{n+2}-a_n=4$，

所以 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 -7 为首项，4 为公差的等差数列，$a_n=-7+4\times\left(\frac{n+1}{2}-1\right)=2n-9$.

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$a_n+a_{n+1}=2$，$a_{n+1}+a_{n+2}=-2$，两式相减得 $a_{n+2}-a_n=-4$，

所以 $\{a_n\}$ 的偶数项是以 5 为首项，-4 为公差的等差数列，$a_n=5-4\times\left(\frac{n}{2}-1\right)=9-2n$.

综上，$a_n=(-1)^{n+1}(2n-9)$，$n\in\mathbf{N}_+$，

所以 $a_na_{n+1}=(-1)^{n+1}(2n-9)\cdot(-1)^{n+2}(2n-7)=-(2n-9)(2n-7)$，

设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，则 $b_n=-\frac{1}{(2n-9)(2n-7)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-9}-\frac{1}{2n-7}\right)$，

所以 $S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=-\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-9}-\frac{1}{2n-7}\right)\right]$

$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}-\frac{1}{2n-7}\right)=\frac{n}{14n-49}$，

则 $S_{49}=\frac{49}{14\times49-49}=\frac{1}{13}$.

故选 A.

7. AC 【解析】对于 A，由 $a_1=1$，$a_2=2$，及 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，

可得 $a_3=a_2-a_1=1$，$a_4=a_3-a_2=-1$，$a_5=a_4-a_3=-2$，**故 A 正确；**

对于 B，取 $\lambda=\frac{5}{2}$，即 $a_n=n^2-\frac{5}{2}n$，则 $a_{n+1}=(n+1)^2-\frac{5}{2}(n+1)$，

此时 $a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-\frac{5}{2}(n+1)-n^2+$

$\frac{5}{2}n=2n-\frac{3}{2}>0$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立，即数列 $\{a_n\}$ 递增，故 B 错误；

对于 C，因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a_5=450$，

即 $a_5=90$，

所以 $a_2+a_8=2a_5=180$，故 C 正确；

对于 D，由 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+2}{n+3}$，可得 $\frac{S_9}{T_9}=\frac{\frac{9(a_1+a_9)}{2}}{\frac{9(b_1+b_9)}{2}}=\frac{a_1+a_9}{b_1+b_9}=\frac{a_5}{b_5}=\frac{65}{12}\neq\frac{72}{13}$，故 D 错误. 故选 AC.

8. 11　【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，

又 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列，$S_2=4$，所以 $S_n\geqslant 0$，则 $d>0$，且 $a_1-\frac{d}{2}=0$，

所以 $S_2=\frac{d}{2}\times 4=4$，解得 $d=2$，故 $a_1=S_1=\frac{d}{2}=1$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$，则 $a_6=11$.

9.【解】(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_2=11$，$a_5=5$，设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $\begin{cases}a_1+d=11,\\a_1+4d=5,\end{cases}$

解得 $a_1=13$，$d=-2$，故 $a_n=13+(n-1)\times(-2)=-2n+15$.

(2) 令 $-2n+15=-100$，解得 $n=\frac{115}{2}$，又 $\frac{115}{2}\notin\mathbf{N}_+$，

故 -100 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

(3) 由 $a_1=13$，$d=-2$，得 $S_n=13n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+14n=-(n-7)^2+49$，可知 S_n 可看作是关于 n 的二次

函数,

由二次函数的性质可知,当 $n=7$ 时,

S_n 取最大值,最大值为 49.

一题多解 (3)因为 $d<0$,所以数列 $\{a_n\}$ 递减,

令 $a_n=15-2n\geq 0$,解得 $n\leq\frac{15}{2}$,

又由 $n\in\mathbf{N}_+$,得等差数列 $\{a_n\}$ 的前 7 项均为正数,从第 8 项开始为负数,

所以前 7 项和最大,$S_7=13\times 7+\frac{7\times 6}{2}\times(-2)=49$.

10.【证明】数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,说明如下:

令 $x=\frac{1}{n}$,得 $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$,

即 $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}$.

由 $a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$,

得 $a_n=f(1)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)+f(0)$,

两式等号左右分别相加,得 $2a_n=[f(0)+f(1)]+\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)\right]+[f(1)+f(0)]=\frac{n+1}{2}$,所以 $a_n=\frac{n+1}{4}$,$n\in\mathbf{N}_+$.

又因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{n+1+1}{4}-\frac{n+1}{4}=\frac{1}{4}$,所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

11.【解】(1)已知 $a_2=4$,设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则 $a_2=a_1+d=4$.

因为 $S_5=30$,根据等差数列前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,

可得 $S_5=5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=5a_1+10d=30$,即

$a_1+2d=6$.

联立$\begin{cases}a_1+d=4,\\a_1+2d=6,\end{cases}$ 解得 $a_1=2,d=2$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2+(n-1)\times2=2n$.

(2)由 $a_1=2,d=2$,

可得 $S_n=2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times2=n^2+n$,

所以 $b_n=\dfrac{S_n}{n+c}=\dfrac{n^2+n}{n+c}$.

因为 b_1,b_2,b_3 成等差数列,所以 $2b_2=b_1+b_3$,

$b_1=\dfrac{S_1}{1+c}=\dfrac{1^2+1}{1+c}=\dfrac{2}{1+c}$,

$b_2=\dfrac{S_2}{2+c}=\dfrac{2^2+2}{2+c}=\dfrac{6}{2+c}$,

$b_3=\dfrac{S_3}{3+c}=\dfrac{3^2+3}{3+c}=\dfrac{12}{3+c}$.

故 $2\times\dfrac{6}{2+c}=\dfrac{2}{1+c}+\dfrac{12}{3+c}$, 解得 $c=0$ 或 $c=1$.

当 $c=0$ 时, $b_n=\dfrac{n^2+n}{n}=n+1$, $b_{n+1}-b_n=(n+1+1)-(n+1)=1$(常数);

当 $c=1$ 时, $b_n=\dfrac{n^2+n}{n+1}=n$, $b_{n+1}-b_n=(n+1)-n=1$(常数).

所以 $c=0$ 或 $c=1$, $\{b_n\}$为等差数列.

12. (1)【解】若选①, $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}$,

因为 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n})\times(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$,

所以$(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n})(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})=\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}$,

因为数列$\{a_n\}$的各项均为正数,所以 $\sqrt{S_n}>0$, $\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}>0$,

所以 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=1$,

又 $a_1=1$, $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$,所以$\{\sqrt{S_n}\}$为首项和公差均为 1 的等差数列,

所以 $\sqrt{S_n}=1+n-1=n$, $S_n=n^2$,

所以当 $n=1$ 时, $a_1=1$,当 $n\geqslant2$ 时, $a_n=$

$S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，$a_1=1$ 显然满足上式.

综上，$a_n=2n-1$.

若选②，$2\sqrt{S_n}-1=a_n$，

当 $n=1$ 时，$2\sqrt{a_1}-1=a_1$，解得 $a_1=1$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$2\sqrt{S_n}-1=a_n=S_n-S_{n-1}$，

故 $S_{n-1}=S_n-2\sqrt{S_n}+1=(\sqrt{S_n}-1)^2$，

又因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，所以 $S_{n-1}>0$，

故 $\sqrt{S_{n-1}}=\sqrt{S_n}-1$，即 $\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$，

又 $\sqrt{S_1}=1$，故 $\{\sqrt{S_n}\}$ 为首项和公差均为 1 的等差数列，

所以 $\sqrt{S_n}=1+n-1=n$，则 $S_n=n^2$，

所以当 $n=1$ 时，$a_1=1$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，

$a_1=1$ 显然满足上式.

综上，$a_n=2n-1$.

(2)【**证明**】由(1)知，因为 $a_{n+1}=2n+1$，$S_n=n^2$，

所以 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_n\cdot S_{n+1}}=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$，

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}<1$，

因为 $T_{n+1}-T_n=1-\dfrac{1}{(n+2)^2}-1+\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}=\dfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}>0$，

所以 $T_{n+1}>T_n$，

所以 $\{T_n\}$ 为递增数列，故 $\{T_n\}$ 的最小值为 T_1，$T_1=b_1=1-\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{3}{4}$，

所以 $\dfrac{3}{4}\leqslant T_n<1$.

§3 等比数列

3.1 等比数列的概念及其通项公式

对点上分

1. A 【解析】因为$\{a_n\}$为等比数列且通项公式为$a_n=-2\times3^n$,

所以公比$q=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{-2\times3^n}{-2\times3^{n-1}}=3(n\geqslant2)$,

故选 A.

2. CD

攻略上分 可利用通法攻略7中的定义法,判断数列是否为等比数列,注意等比数列中的项不能有0.

【解析】设等比数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公比分别为q,p.

$\{a_n+b_n\}$与$\{a_n-b_n\}$中的项可能为0,**故 A,B 错误;**

$\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{b_{n+1}}{b_n}=qp$,故$\{a_nb_n\}$是等比数列,**故 C 正确;**

$\frac{\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}{\frac{b_n}{a_n}}=\frac{b_{n+1}}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{p}{q}$,故$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$是等比数列,**故 D 正确. 故选 CD.**

3. B

攻略上分 当$b_n=n$时,可由通法攻略7中的通项公式法,快速判断$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$是否为等比数列.

【解析】当$b_n=2n$时,$\frac{a_n}{b_n}=\frac{(-2)^n}{2}$,数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$为等比数列,

所以"数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$为等比数列"推不出"数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n$".

由$a_n=n\cdot(-2)^n$,$b_n=n$,得$\frac{a_n}{b_n}=$

$\frac{n\cdot(-2)^n}{n}=(-2)^n$,

则数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$为等比数列,所以"数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n$"能推出"数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$为等比数列".

所以"数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$为等比数列"是"数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n$"的必要不充分条件. **故选** B.

4. **攻略上分** 将$a_{n+1}^2+2a_{n+1}=a_na_{n+2}+a_n+a_{n+2}$变形并求出$\frac{a_2+1}{a_1+1}$,再由通法攻略7中的等比中项法,即可证明$\{a_n+1\}$是等比数列.

【证明】因为$a_{n+1}^2+2a_{n+1}=a_na_{n+2}+a_n+a_{n+2}$,

所以$(a_{n+1}+1)^2=(a_n+1)(a_{n+2}+1)$.

因为$a_1=2,a_2=5$,所以$a_1+1=3,a_2+1=6$,所以$\frac{a_2+1}{a_1+1}=2$.

故数列$\{a_n+1\}$是以3为首项,2为公比的等比数列.

5. B 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,由$a_2+a_3=1,a_2-a_4=3$,得$a_1q(1+q)=1,a_1q(1-q^2)=3$,解得$q=-2$,$a_1=\frac{1}{2}$,

则$a_6=a_1q^5=\frac{1}{2}\times(-2)^5=-16$. **故选** B.

6. A 【解析】因为$a_1=1,a_{n+1}=2a_n$,

所以数列$\{a_n\}$是首项$a_1=1$,公比$q=2$的等比数列,

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$. 又$a_n=8$,即$2^{n-1}=8=2^3$,所以$n=4$. **故选** A.

7. B 【解析】因为$a_3-a_1=3,a_6-a_4=81$,

且$\{a_n\}$为等比数列,

所以$a_3\cdot q^3-a_1\cdot q^3=q^3(a_3-a_1)=3q^3=81$,解得$q=3$.

8. D 【解析】由题意得$6a_2=a_1+9a_3$,设

$\{a_n\}$的公比为 q,则 $6a_1q=a_1+9a_1q^2$.

因为 $a_1=1$,所以 $9q^2-6q+1=0$,解得 $q=\frac{1}{3}$,则 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=\frac{1}{3^{n-1}}$.

故选 D.

9. D 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q. 由题可知,$a_1a_2a_3=27$,

因为 $a_1a_3=a_2^2$,所以 $a_1a_2a_3=a_2^3=27$,解得 $a_2=3$,

所以 $a_3=a_2q=3q$,$a_4=a_2q^2=3q^2$,

所以 $a_3^2+\frac{1}{a_4}=(3q)^2+\frac{1}{3q^2}=9q^2+\frac{1}{3q^2}\geqslant 2\sqrt{9q^2\times\frac{1}{3q^2}}=2\sqrt{3}$,

当且仅当 $9q^2=\frac{1}{3q^2}$,即 $q^2=\frac{\sqrt{3}}{9}$时等号成立,

所以 $a_3^2+\frac{1}{a_4}$的最小值为 $2\sqrt{3}$. **故选** D.

10. (1)【**解**】由题可知,$a_{n+1}=3a_n+2n-1$,令 $n=1$,则 $a_2=3a_1+1=4$,令 $n=2$,则 $a_3=3a_2+3=15$.

(2)【**证明**】由 $a_{n+1}=3a_n+2n-1$,得 $a_{n+1}+(n+1)=3(a_n+n)$,

且 $a_1+1=2\neq 0$,所以数列$\{a_n+n\}$是首项为 2,公比为 3 的等比数列.

(3)【**解**】由(2)知,数列$\{a_n+n\}$是首项为 2,公比为 3 的等比数列,

所以 $a_n+n=2\times 3^{n-1}$,则 $a_n=2\times 3^{n-1}-n$.

11. D 【解析】当 $a_1=-1,q=2$ 时,$a_n=-2^{n-1}$,$\{a_n\}$不是递增数列,充分性不成立;

当 $a_1=-1,q=\frac{1}{2}$时,$a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,$\{a_n\}$是递增数列,但 $q>1$ 不成立,必要性不成立.

所以甲是乙的既不充分也不必要条件. **故选** D.

12. C 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,则 $q>0$,由题意可得 $q=\sqrt{\frac{a_4}{a_2}}=$

$\sqrt{\frac{63}{8}\times\frac{2}{63}}=\frac{1}{2}$,

所以 $a_n=a_2q^{n-2}=\frac{63}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{63}{2^{n-1}}$,

令 $\frac{63}{2^{n-1}}\geqslant 1$,可得 $2^{n-1}\leqslant 63$,因为 $n\in\mathbf{N}_+$,

所以 $n\in\{1,2,3,4,5,6\}$,

因此,当 T_n 取得最大值时,$n=6$. **故选** C.

13. A 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,所以 $a_2a_4=a_3^2=16$,则 $a_3=\pm4$.

因为 $a_1+a_3=5$,所以 $a_1=5-a_3$,即 $a_1=1$ 或 $a_1=9$,

易知在等比数列中,a_1,a_3 同号,所以 $a_1=1$,$a_3=4$.

故选 A.

14. D 【解析】因为 2 是 $2m$ 与 n 的等差中项,所以 $2m+n=4$①.

因为 2 是 m 与 $2n$ 的等比中项,所以 $2mn=4$②.

①②式联立,解得 $m=1$,$n=2$,所以 m,n 的等比中项为 $\pm\sqrt{mn}=\pm\sqrt{2}$. **故选** D.

15. B

攻略上分 使用通法攻略 8 中的等比数列序号和的性质化简求解即可.

【解析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1a_3+2a_2a_6+a_5a_7=12$,

则 $a_2^2+2a_2a_6+a_6^2=(a_2+a_6)^2=12$,

所以 $a_2+a_6=\pm2\sqrt{3}$. **故选** B.

16. B

攻略上分 利用一元二次方程根与系数的关系,得到 a_6,a_{10} 和与积的关系,利用通法攻略 8 中的性质可得 a_8^2 的值,再通过 a_6,a_{10} 的正负判断 a_8 是正值还是负值.

【解析】根据一元二次方程根与系数的关系可得 $a_6\cdot a_{10}=3$,$a_6+a_{10}=-2\ 025$,

则 $a_6<0,a_{10}<0$.

因为 $a_6\cdot a_{10}=a_8^2=3$，所以 $a_8=\pm\sqrt{3}$，又因为等比数列的偶数项符号相同，且 a_6,a_{10} 都是负数，所以 $a_8=-\sqrt{3}$. **故选 B.**

易错警示 等比数列奇数项符号相同，偶数项符号相同，解题时注意符号的判断. 因此 a_8 与 a_6,a_{10} 的符号相同，本题需要利用一元二次方程根与系数的关系判断 a_6,a_{10} 的符号.

17. BD

攻略上分 使用通法攻略 8 中的等比数列的性质和等比数列的定义，可分别判断各选项中的数列是否为等比数列.

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q $(q\neq0)$.

则 $\frac{a_4}{a_2}=q^2,\frac{a_8}{a_4}=q^4$，当 $q\neq\pm1$ 时，$q^2\neq q^4$，此时数列 a_2,a_4,a_8 不是等比数列，**故 A 错误.**

易知数列 a_1a_2,a_3a_4,a_5a_6 中每一项都不为 0，且 $\frac{a_3a_4}{a_1a_2}=\frac{a_5a_6}{a_3a_4}=q^4$，所以数列 a_1a_2,a_3a_4,a_5a_6 成等比数列，**故 B 正确.**

当数列 $\{a_n\}$ 为 $1,-1,1,-1,1,\cdots$ 时，$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=0$，此时 a_1+a_2,a_3+a_4,a_5+a_6 不是等比数列，**故 C 错误.**

易知数列 $a_1+a_2+a_3,a_4+a_5+a_6,a_7+a_8+a_9$ 中每一项都不为 0，且 $\frac{a_4+a_5+a_6}{a_1+a_2+a_3}=\frac{a_7+a_8+a_9}{a_4+a_5+a_6}=q^3$，所以 $a_1+a_2+a_3,a_4+a_5+a_6,a_7+a_8+a_9$ 成等比数列，**故 D 正确.**

故选 BD.

18. 39 【解析】设病毒复制 n 次所占内

存的大小为 a_n，则数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，

且 $a_1=2$，公比 $q=2$，$\therefore a_n=2^n$，由 $2^n=8\times2^{10}=2^{13}$，得 $n=13$，即病毒共复制了 13 次. $\therefore$ 所需时间为 $13\times3=39$（秒）.

19. 5 【解析】设今年绿洲面积为 $a_1=0.3$ 万平方千米，从今年起第 n（$n\in\mathbf{N}_+$）年后绿洲面积为 a_{n+1} 万平方千米.

由题意，$n\geqslant2$ 时，$a_n=(1-0.04)a_{n-1}+(1-a_{n-1})\times0.16=0.8a_{n-1}+0.16=\frac{4}{5}a_{n-1}+\frac{4}{25}$，所以 $a_n=\frac{4}{5}a_{n-1}+\frac{4}{25}(n\geqslant2)$.

设 $a_n+x=\frac{4}{5}(a_{n-1}+x)$，可得 $a_n=\frac{4}{5}a_{n-1}-\frac{x}{5}$，所以 $-\frac{x}{5}=\frac{4}{25}$，可得 $x=-\frac{4}{5}$，所以 $a_n-\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\left(a_{n-1}-\frac{4}{5}\right)(n\geqslant2)$，且 $a_1-\frac{4}{5}=\frac{3}{10}-\frac{4}{5}=-\frac{1}{2}$，因此数列 $\left\{a_n-\frac{4}{5}\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{4}{5}$ 的等比数列，所以 $a_n-\frac{4}{5}=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$，即 $a_n=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+\frac{4}{5}$.

令 $a_n=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+\frac{4}{5}>\frac{3}{5}$，

整理可得 $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}<\frac{2}{5}$，两边取常用对数，则有 $(n-1)\lg\frac{4}{5}<\lg\frac{2}{5}$，即 $n-1>\frac{\lg\frac{2}{5}}{\lg\frac{4}{5}}=\frac{\lg2-\lg5}{2\lg2-\lg5}=\frac{\lg2-(1-\lg2)}{2\lg2-(1-\lg2)}=\frac{2\lg2-1}{3\lg2-1}\approx\frac{2\times0.301-1}{3\times0.301-1}=\frac{-0.398}{-0.097}\approx4.1$，

所以 $n>5.1$，又 $n\in\mathbf{N}_+$，故至少经过 5 年，绿洲面积可超过总土地面积的 60%.

能力上分

1. C 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$q>0$. 因为 $S_4=2S_3-S_2+6$，即 $S_4-S_3=S_3-$

S_2+6，所以 $a_4=a_3+6$，

又因为 $a_2=1$，所以 $q^2=q+6$，

所以 $q=3$，所以 $a_5=a_2\cdot q^3=1\times3^3=27$. **故选** C.

2. B 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $b(b\neq0)$.

若 $a_ma_n=a_pa_q$，则 $a_1b^{m-1}\cdot a_1b^{n-1}=a_1b^{p-1}\cdot a_1b^{q-1}$，因为 $a_1\neq0$，

所以 $b^{m+n-2}=b^{p+q-2}$，当 $b=\pm1$ 时，无法得出 $m+n=p+q$，

所以"$a_ma_n=a_pa_q$"不是"$m+n=p+q$"的充分条件；

若"$m+n=p+q$"，则 $a_ma_n=a_1b^{m-1}\cdot a_1b^{n-1}=a_1^2b^{m+n-2}=a_1^2b^{p+q-2}=a_1b^{p-1}\cdot a_1b^{q-1}=a_pa_q$，

所以"$a_ma_n=a_pa_q$"是"$m+n=p+q$"的必要条件.

故"$a_ma_n=a_pa_q$"是"$m+n=p+q$"的必要不充分条件. **故选** B.

3. B 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq0)$，$\because a_3a_4a_5=a_4^3=512$，$\therefore a_4=8$.

$\because a_7=a_4q^3=64$，$\therefore q^3=8$，解得 $q=2$，

$\therefore a_n=a_4q^{n-4}=2^{n-1}$.

由 $2a_n-8n-t\geqslant0$，得 $t\leqslant2a_n-8n$，即 $t\leqslant2^n-8n$.

记 $b_n=2^n-8n$，则 $b_{n+1}-b_n=2^{n+1}-8n-8-(2^n-8n)=2^n-8$，

当 $n>3$ 时，$b_{n+1}>b_n$，当 $n=3$ 时，$b_{n+1}=b_n$，当 $n<3$ 时，$b_{n+1}<b_n$，

$\therefore$ 当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，b_n 取得最小值 -16，$\therefore t\leqslant-16$，即实数 t 的取值范围为$(-\infty,-16]$.

4. ABD 【解析】对于 A 选项，由 $S_{n+1}=2S_n+n$，得 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=S_n+n>S_n$，**故 A 正确**.

对于 C 选项，由 A 选项分析知，$a_2=S_1+1=2+1=3$，

当 $n\geqslant2$ 时，由 $S_{n+1}=2S_n+n$，得 $S_n=2S_{n-1}+n-1$，

上述两个等式作差，得 $a_{n+1}=2a_n+1$，则 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，

易知 $a_n+1\neq 0$，故当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，而 $\dfrac{a_2+1}{a_1+1}=\dfrac{4}{3}\neq 2$，所以数列 $\{a_n+1\}$ 不是等比数列，**故 C 错误.**

对于 D 选项，由 $S_{n+1}=2S_n+n$，得 $S_{n+1}+(n+1)+1=2S_n+2n+2=2(S_n+n+1)$，

且 $S_1+2=4$，所以数列 $\{S_n+n+1\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，**故 D 正确.**

对于 B 选项，由 D 选项分析可知 $S_n+n+1=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$，所以 $S_n=2^{n+1}-n-1$，

所以 $\dfrac{S_n}{2^n}=\dfrac{2^{n+1}-n-1}{2^n}=2-\dfrac{n+1}{2^n}$，

令 $b_n=\dfrac{S_n}{2^n}$，故 $b_{n+1}-b_n=\left(2-\dfrac{n+2}{2^{n+1}}\right)-\left(2-\dfrac{n+1}{2^n}\right)=\dfrac{n}{2^{n+1}}>0$，即 $b_{n+1}>b_n$，

所以数列 $\{b_n\}$ 为递增数列，即数列 $\left\{\dfrac{S_n}{2^n}\right\}$ 为递增数列，**故 B 正确. 故选 ABD.**

5. $\begin{cases}1, n=1,\\ 3, n=2,\\ 4\times 3^{n-3}, n\geqslant 3\end{cases}$ 【解析】当 $n\geqslant 2$ 时，有 $a_{n+1}=2S_n-4$①，则当 $n\geqslant 3$ 时，有 $a_n=2S_{n-1}-4$②，

①②两式相减可得 $a_{n+1}-a_n=2(S_n-S_{n-1})=2a_n$，即 $a_{n+1}=3a_n(n\geqslant 3)$，

又 $a_1=1$，$a_2=3$，所以 $a_3=2S_2-4=4$，

所以当 $n\geqslant 3$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为首项，3 为公比的等比数列，

此时 $a_n=4\times 3^{n-3}(n\geqslant 3)$，又 $a_1=1$，$a_2=3$ 均不满足上式，

所以 $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ 3, n=2,\\ 4\times 3^{n-3}, n\geqslant 3.\end{cases}$

6. (1)【解】由题意,得 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$.

因为 $a_1=\frac{1}{2}$,所以 $a_2=\frac{2}{3}$,$a_3=\frac{4}{5}$.

(2)【证明】易知 $b_n\neq 0$,

因为 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$,

所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1-a_{n+1}}{a_{n+1}}}{\frac{1-a_n}{a_n}}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-1}{\frac{1-a_n}{a_n}}=\frac{\frac{a_n+1}{2a_n}-1}{\frac{1-a_n}{a_n}}=\frac{1}{2}$,又因为 $b_1=\frac{1-a_1}{a_1}=1$,所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

(3)【证明】由(2)可得 $b_n=\frac{1-a_n}{a_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,所以 $a_n=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}$.

因为 $a_n-\frac{1}{2}=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2}=\frac{2\times 2^{n-1}-2^{n-1}-1}{2(2^{n-1}+1)}=\frac{2^{n-1}-1}{2^n+2}$,

且当 $n\in\mathbf{N}_+$ 时,$2^{n-1}-1\geqslant 0$,$2^n+2>0$,

所以 $a_n-\frac{1}{2}\geqslant 0$,即 $a_n\geqslant\frac{1}{2}$.

又因为 $a_n-1=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}-1=\frac{-1}{2^{n-1}+1}<0$,

所以 $a_n<1$.

综上,对于任意 $n\in\mathbf{N}_+$,都有 $\frac{1}{2}\leqslant a_n<1$.

7.【解】(1)当 $n=1$ 时,$S_1=a_2-3\times 1-3$. 因为 $S_1=a_1=3$,所以 $3=a_2-3-3$,解得 $a_2=9$.

$S_n=a_{n+1}-3n-3$①,当 $n\geqslant 2$ 时,$S_{n-1}=a_n-3(n-1)-3$②,

①−②得 $a_n=a_{n+1}-a_n-3$,整理得 $a_{n+1}=2a_n+3$,

经检验,当 $n=1$ 时,满足上式,

所以 $a_{n+1}=2a_n+3$,$n\in\mathbf{N}_+$.

(2)由 $a_{n+1}=2a_n+3$,得 $a_{n+1}+3=2(a_n+3)$,又 $a_1+3=6\neq 0$,所以数列 $\{a_n+3\}$ 是以 6 为首项,2 为公比的等比数列,

所以 $a_n+3=6\times2^{n-1}$，即 $a_n=3\times2^n-3$.

(3)由题意 $b_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+2)-1}=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}$，

由(2)可知，$a_{n+1}-a_n=3\times2^{n+1}-3-(3\times2^n-3)=3\times2^n$，

所以 $b_n=\frac{3\times2^n}{n+1}$，则 $\frac{1}{b_n}=\frac{n+1}{3\times2^n}$.

令 $c_n=\frac{n+1}{3\times2^n}$，则 $\lambda\geqslant(c_n)_{\max}$，

而 $c_{n+1}-c_n=\frac{n+2}{3\times2^{n+1}}-\frac{n+1}{3\times2^n}=\frac{-n}{3\times2^{n+1}}<0$，

所以 $c_{n+1}<c_n$，即数列$\{c_n\}$为递减数列，

故 $(c_n)_{\max}=c_1=\frac{1}{3}$，所以 $\lambda\geqslant\frac{1}{3}$，所以 λ 的最小值为 $\frac{1}{3}$.

3.2 等比数列的前 n 项和

课时1 等比数列的前 n 项和(1)

对点上分

1. B 【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq0)$，

当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，不符合题意.

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-\frac{a_1}{1-q}q^n+\frac{a_1}{1-q}$，因为 $S_n=t\cdot3^{n-1}-1=\frac{1}{3}t\cdot3^n-1$，

所以 $\frac{1}{3}t+(-1)=-\frac{a_1}{1-q}+\frac{a_1}{1-q}=0$，解得 $t=3$. **故选** B.

2. B 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，$q\neq0$.

当 $q=1$ 时，由 $a_1=-1$，可得 $S_{10}=-10$，$S_5=-5$，此时 $S_{10}=\frac{31}{32}S_5$ 不成立；

当 $q\neq1$ 时，由等比数列的前 n 项和公式，可得 $\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{31}{32}\times\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}$，解得 $q=-\frac{1}{2}$.

由等比数列的通项公式，可得 $a_4=a_1q^3=\frac{1}{8}$. **故选** B.

3. B 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 由题知 $q\neq 1$, 由题得 $\begin{cases}a_4-a_2=6,\\a_5-a_3=12,\end{cases}$

则 $\begin{cases}a_1q(q^2-1)=6,\\a_1q^2(q^2-1)=12,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\q=2,\end{cases}$

所以 $\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{\frac{1-2^n}{1-2}}{2^{n-1}}=\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$. **故选** B.

4. ABD 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 由题知, $a_n>0, q>0$,

由题意得 $\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3=30①,\\a_1q^3=3a_1q+2a_1②,\end{cases}$

易知 $a_1\neq 0$, 由②得 $q^3=3q+2$,

即 $(q+1)^2(q-2)=0$, 解得 $q=2$ 或 $q=-1$ (舍去),

将 $q=2$ 代入①得 $a_1=2$, 故 $a_2=a_1q=4, a_3=a_1q^2=8$. **故选** ABD.

5. C 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

由题知 $S_3=1, S_5-S_2=2$,

若 $q=1$, 则 $S_3=3a_1=1, S_5-S_2=5a_1-2a_1=3a_1=2$, 矛盾, 故 $q\neq 1$,

故 $\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=1,\\ \dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}-\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}=2①,\end{cases}$

将 $a_1=\dfrac{1-q}{1-q^3}$ 代入①式得 $\dfrac{1-q}{1-q^3}\cdot\dfrac{1-q^5}{1-q}-\dfrac{1-q}{1-q^3}\cdot\dfrac{1-q^2}{1-q}=\dfrac{-q^5+q^2}{1-q^3}=q^2=2$.

$S_9-S_6=\dfrac{a_1(1-q^9)}{1-q}-\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{a_1(q^6-q^9)}{1-q}=\dfrac{a_1q^6(1-q^3)}{1-q}$,

因为 $\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=1, q^2=2$, 所以 $S_9-S_6=\dfrac{a_1q^6(1-q^3)}{1-q}=1\times 2^3=8$. **故选** C.

6. B 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q. 因为 $a_1+a_n=82, a_3a_{n-2}=81\ (n\geqslant 3)$, 所以 $a_1+a_1q^{n-1}=82$ ①, $a_1q^2\cdot a_1q^{n-3}=$

$a_1^2q^{n-1}=81$②，由②得 $a_1q^{n-1}=\frac{81}{a_1}$，代入①可得 $a_1+\frac{81}{a_1}=82$，即 $a_1^2-82a_1+81=0$，解得 $a_1=1$ 或 $a_1=81$.

若 $\{a_n\}$ 是递增数列，则 $a_1=1,a_n=81$，因为 $S_n=121$，所以 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{1-81q}{1-q}=121$，解得 $q=3$，故 $81=1\times3^{n-1}$，解得 $n=5$.

若 $\{a_n\}$ 是递减数列，则 $a_1=81,a_n=1$，因为 $S_n=121$，所以 $\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{81-q}{1-q}=121$，解得 $q=\frac{1}{3}$，

故 $1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，解得 $n=5$.

综上，此数列的项数 n 等于 5. **故选 B.**

一题多解 因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $a_1a_n=a_3a_{n-2}=81(n\geqslant3)$，又 $a_1+a_n=82$，所以 a_1 和 a_n 是方程 $x^2-82x+81=0$ 的两根，解得 $x=1$ 或 $x=81$，即有 $a_1=1,a_n=81$ 或 $a_1=81$，$a_n=1$ 两种情况，后续讨论同解析.

7. $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 【解析】由题知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的无穷等比数列，又 $0<S_4<\frac{5}{4}S_2$，易知 $q\neq-1$ 且 $q\neq0$，当 $q=1$ 时，$0<4a_1<\frac{5}{4}\times2a_1$，无解，故 $q\neq1$.

当 $q\neq1,0,-1$ 时，$0<\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}<\frac{5}{4}\cdot\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$，故 $0<a_1(1+q^2)(1+q)<\frac{5}{4}\cdot a_1(1+q)$.

当 $q<-1$ 时，$a_1<0$，此时 $0<1+q^2<\frac{5}{4}$，无解；

当 $-1<q<0$ 时，$a_1>0$，此时 $0<1+q^2<\frac{5}{4}$，

解得 $-\frac{1}{2}<q<0$；

当 $0<q<1$ 时，$a_1>0$，此时 $0<1+q^2<\frac{5}{4}$，

解得 $0<q<\frac{1}{2}$；

当 $q>1$ 时，$a_1>0$，此时 $0<1+q^2<\frac{5}{4}$，

无解.

综上，q 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

8. A

攻略上分 根据已知条件，可利用通法攻略 9 中的片段和性质，快速求得公比 q.

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q $(q\neq 0)$，由题知，$q\neq -1$，由等比数列前 n 项和的性质有 $S_6-S_3=q^3S_3$，即 $20=10q^3$，解得 $q^3=2$，则 $\frac{a_{2\,025}}{a_{2\,022}}=q^3=2$，**故选** A.

9. D

攻略上分 根据通法攻略 9 中片段和性质，可快速求出 S_{20} 的值.

【解析】由题知，$\{a_n\}$ 的公比不是 -1，由等比数列前 n 项和的性质知 S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$，$S_{20}-S_{15}$ 成等比数列，

则 $\frac{S_{15}-S_{10}}{S_{10}-S_5}=\frac{S_{10}-S_5}{S_5}$，即 $\frac{78-S_{10}}{S_{10}-6}=\frac{S_{10}-6}{6}$，

整理可得 $S_{10}^2-6S_{10}-432=0$，

解得 $S_{10}=24$ 或 $S_{10}=-18$（不符合题意，舍去），

由 $\frac{S_{20}-S_{15}}{S_{15}-S_{10}}=\frac{S_{10}-S_5}{S_5}$，得 $\frac{S_{20}-78}{78-24}=\frac{24-6}{6}$，

解得 $S_{20}=240$. **故选** D.

10. D

攻略上分 通过题目信息可以求出 q^3（q 为公比）的值，可以利用基本量的计算求解，也可以利用通法攻略 9 中，$S_{n+m}=S_n+q^nS_m$ $(n,m\in\mathbf{N}_+)$ 进行简化计算，还可以利用通法攻略 9 中的片段和性质，不需要计算 q^3 的值，即可求解.

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q $(q\neq 0)$，由$S_3=4$，得$a_1+a_2+a_3=4$，

则$a_4+a_5+a_6=(a_1+a_2+a_3)q^3=4q^3=6$，

所以$q^3=\frac{3}{2}$.

方法一：$\frac{S_9}{S_3+S_6}=\frac{\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}=$

$\frac{1-q^9}{1-q^3+1-q^6}=\frac{1-\frac{27}{8}}{1-\frac{3}{2}+1-\frac{9}{4}}=\frac{19}{14}$. **故选** D.

方法二：因为$S_6=S_3+S_3q^3$，$S_9=S_6+S_3q^6=(1+q^3+q^6)S_3$，

所以$\frac{S_9}{S_3+S_6}=\frac{(1+q^3+q^6)S_3}{(2+q^3)S_3}=\frac{1+q^3+q^6}{2+q^3}=$

$\frac{1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}}{2+\frac{3}{2}}=\frac{19}{14}$.

故选 D.

快解 由题可得，$S_3=4$，$S_6=10$，$S_6-S_3=6$，可知$\{a_n\}$的公比不是-1，则S_3，S_6-S_3，S_9-S_6成等比数列，所以$S_9-S_6=9$，故$S_9=19$，$\frac{S_9}{S_3+S_6}=\frac{19}{4+10}=\frac{19}{14}$. **故选** D.

11. C

攻略上分 根据通法攻略9中，等比数列前n项和的片段和性质，可快速求出S_{15}的值.

【解析】由题可知，$\{a_n\}$的公比不是-1，则S_3，S_6-S_3，S_9-S_6，$S_{12}-S_9$，$S_{15}-S_{12}$成等比数列，

所以$(S_6-S_3)^2=S_3(S_9-S_6)$，即$(-3)^2=9S_3$，则$S_3=1$，故等比数列S_3，S_6-S_3，S_9-S_6，$S_{12}-S_9$，$S_{15}-S_{12}$的首项是1，

公比是-3，故$S_{12}-S_9=1\times(-3)^3=-27$，

$S_{15}-S_{12}=1\times(-3)^4=81$，

所以$S_{15}=1+(-3)+9+(-27)+81=61$.

故选 C.

12. 2

攻略上分 根据通法攻略9中,等比数列奇偶项和性质,可快速求得公比 q,进而求得 a_1.

【解析】由题设$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=126,\\a_2+a_4+a_6=2(a_1+a_3+a_5),\end{cases}$

可得$\begin{cases}a_1+a_3+a_5=42,\\a_2+a_4+a_6=84,\end{cases}$设$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq0)$,则 $a_2+a_4+a_6=(a_1+a_3+a_5)q$,则 $q=2$,所以 $a_1+a_3+a_5=a_1(1+q^2+q^4)=21a_1=42$,则 $a_1=2$.

13. 52

攻略上分 根据通法攻略9中,等比数列前 n 项和的片段和性质,可快速求出 S_{3k} 的值.

【解析】因为$\{a_n\}$为正项等比数列,所以 $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k},S_{4k}-S_{3k},\cdots$也成等比数列,

则 $(S_{2k}-S_k)^2=S_k(S_{3k}-S_{2k})$,$(S_{3k}-S_{2k})^2=(S_{2k}-S_k)(S_{4k}-S_{3k})$,

即$\begin{cases}(S_{2k}-4)^2=4(S_{3k}-S_{2k}),\\(S_{3k}-S_{2k})^2=(S_{2k}-4)(160-S_{3k}),\end{cases}$

可得 $S_{3k}S_{2k}-S_{2k}^2+4S_{2k}=640$①,

由 $S_k(S_{3k}-S_{2k})=(S_{2k}-S_k)^2$,得 $S_{3k}=\dfrac{(S_{2k}-4)^2}{4}+S_{2k}$,将其代入①式得 $S_{2k}\cdot(S_{2k}-4)^2+16S_{2k}=2\ 560$,

所以 $S_{2k}^3-8S_{2k}^2+32S_{2k}-2\ 560=0$,

所以$(S_{2k}-16)(S_{2k}^2+8S_{2k}+160)=0$,

又 $S_{2k}^2+8S_{2k}+160>0$,所以 $S_{2k}-16=0$,所以 $S_{2k}=16$,所以 $S_{3k}=52$.

课时2 等比数列的前 n 项和(2)

对点上分

1. C **【解析】**由题意,从下往上每层“浮雕像”的数量成等比数列,设为$\{a_n\}$.设$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 $S_6=378$,$\{a_n\}$的公比 $q=2$,所以 $S_6=\dfrac{a_1(1-2^6)}{1-2}=63a_1=378$,所以 $a_1=6$,所

以第 4 层“浮雕像”的数量 $a_4=6\times2^3=48$. 故选 C.

2.【解】(1)设前 n 天采摘零售的总采摘量为 S_n 千克,

则 $S_{22}=25+30+35+\cdots+130=\dfrac{22\times(25+130)}{2}=1\ 705$(千克),

$S_{30}-S_{22}=a_{23}+a_{24}+\cdots+a_{30}=(2^7-2\times23+80)+(2^6-2\times24+80)+\cdots+(2^0-2\times30+80)=(2^7+2^6+\cdots+2^0)-2\times(23+24+\cdots+30)+8\times80=\dfrac{2^7\times\left(1-\dfrac{1}{2^8}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}-2\times\dfrac{8\times(23+30)}{2}+640=255-424+640=471$(千克),

故开园 30 天时,采摘零售的总采摘量 $S_{30}=1\ 705+471=2\ 176$(千克),

生态采摘园 30 天批发销售和采摘零售总量为 $200\times30+2\ 176=8\ 176$(千克),

因为 $8\ 176<8\ 500$,所以该采摘园在 30 天内不能完成销售计划.

(2)当 $1\leqslant n\leqslant22$ 时,由 $(5n+20)\times4\times2.5\geqslant200\times4$,解得 $12\leqslant n\leqslant22$.

当 $23\leqslant n\leqslant30$ 时,由 $(2^{30-n}-2n+80)\times4\times2.5\geqslant200\times4$,

整理得 $2^{30-n}\geqslant2n$,

令函数 $f(n)=2^{30-n}-2n$, $23\leqslant n\leqslant30$, $n\in\mathbf{N}_+$,易知 $f(n)$ 单调递减,

又因为 $f(24)>0$, $f(25)<0$,

所以不等式 $2^{30-n}-2n\geqslant0(23\leqslant n\leqslant30$, $n\in\mathbf{N}_+)$ 的解集为 $\{n\mid n=23$ 或 $n=24\}$,

因此当 $12\leqslant n\leqslant24$, $n\in\mathbf{N}_+$ 时,当天采摘零售的收入不低于当天批发销售的收入.

3. $a_n=n\cdot2^n$

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{3\times2^n}-\dfrac{n^2}{4}+\dfrac{11}{12}, n=2k-1, k\in\mathbf{N}_+,\\ -\dfrac{1}{3\times2^{n-1}}-\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{n}{2}+\dfrac{2}{3}, n=2k, k\in\mathbf{N}_+\end{cases}$$

【解析】因为 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$,所以

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$,

又 $a_2-2a_1=4\neq0$,所以数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是以 4 为首项,2 为公比的等比数列,

所以 $a_{n+1}-2a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$,所以 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$,

又因为 $\frac{a_1}{2}=1$,所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 1 为首项,1 为公差的等差数列,

所以 $\frac{a_n}{2^n}=1+(n-1)\times1=n$,所以 $a_n=n\cdot2^n$.

由题意得 $b_n=\begin{cases}\frac{n}{a_n}, n=2k-1, k\in\mathbf{N}_+,\\ \log_2\frac{n}{a_n}, n=2k, k\in\mathbf{N}_+,\end{cases}$

即 $b_n=\begin{cases}\frac{1}{2^n}, n=2k-1, k\in\mathbf{N}_+,\\ -n, n=2k, k\in\mathbf{N}_+,\end{cases}$

则 $\{b_n\}$ 的奇数项是以 $b_1=\frac{1}{2}$ 为首项,$\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列,偶数项是以 $b_2=-2$ 为首项,-2 为公差的等差数列.

所以当 n 为偶数,且 $n\geqslant2$ 时,

$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+(-2-4-\cdots-n)=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right]}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{n}{2}(-2-n)}{2}=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{n(n+2)}{4}=-\frac{1}{3\times2^{n-1}}-\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}+\frac{2}{3}$.

当 n 为奇数,且 $n\geqslant3$ 时,$n-1$ 为偶数,

$T_n=T_{n-1}+b_n=-\frac{1}{3\times2^{n-2}}-\frac{(n-1)^2}{4}-\frac{n-1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{3\times2^n}-\frac{n^2}{4}+\frac{11}{12}$,

当 $n=1$ 时,$T_1=\frac{1}{2}$,符合上式,

所以当 n 为奇数，且 $n\geqslant 1$ 时，$T_n=$

$-\frac{1}{3\times 2^n}-\frac{n^2}{4}+\frac{11}{12}$.

综上，数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=$

$$\begin{cases}-\frac{1}{3\times 2^n}-\frac{n^2}{4}+\frac{11}{12},n=2k-1,k\in\mathbf{N}_+,\\-\frac{1}{3\times 2^{n-1}}-\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}+\frac{2}{3},n=2k,k\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$$

4.【解】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

由题意得 $\begin{cases}a_1+d=2,\\9(a_1+4d)=45,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}a_1=1,\\d=1,\end{cases}$ 所以 $a_n=n$.

由题知 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(n-1)\cdot 2^n+1$ ①，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}=(n-2)\cdot 2^{n-1}+1$ ②，

①−②可得，$b_n=2^{n-1}(n\geqslant 2)$，

当 $n=1$ 时，$a_1b_1=1$，则 $b_1=1$，符合 $b_n=2^{n-1}$，所以 $b_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由题意知，在 a_1 与 a_2 之间插入 2^0 个 2，在 a_2 与 a_3 之间插入 2^1 个 2，…，

所以在数列$\{d_n\}$中，从项 a_1 开始到项 a_k 为止，共有 $k+2^0+2^1+\cdots+2^{k-2}=k+\frac{1-2^{k-1}}{1-2}=k+2^{k-1}-1$(项).

当 $k=11$ 时，$11+2^{10}-1=1\ 034<2\ 023$，

当 $k=12$ 时，$12+2^{11}-1=2\ 059>2\ 023$，

所以数列$\{d_n\}$的前 2 023 项是在项 a_{11} 之后还有 $2\ 023-1\ 034=989$(项)为 2，

故 $T_{2\,023}=(1+2+\cdots+11)+2\times(2^0+2^1+\cdots+2^9+989)=\frac{(1+11)\times 11}{2}+2\times\left(\frac{1-2^{10}}{1-2}+989\right)=4\ 090$.

能力上分

1. B 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由于 $S_3\neq 3a_1$，所以 $q\neq 1$，

则 $S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{1-q^3}{1-q}=1+q+q^2=\frac{3}{4}$，

解得 $q=-\frac{1}{2}$，所以 $S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=$

$\dfrac{1-\dfrac{1}{16}}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{5}{8}$，故选 B.

2. D 【解析】由题意，得 $a_1=S_1=4+A$，$a_2=S_2-S_1=(8+A)-(4+A)=4$，$a_3=S_3-S_2=(16+A)-(8+A)=8$，

因为在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2^2=a_1a_3$，所以 $4^2=8(4+A)$，解得 $A=-2$，

所以 $b_n=-2n^2+Bn$.

因为数列$\{b_n\}$是递减数列，

所以 $b_{n+1}-b_n=-2(n+1)^2+B(n+1)-(-2n^2+Bn)<0$，所以 $B<4n+2$，因为 $n\in\mathbf{N}_+$，所以 $B<6$. **故选** D.

3. C 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，因为 $a_1\neq a_2$，所以 $q\neq1$，

又 $4a_3$，$3a_4$，$2a_5$ 成等差数列，所以 $6a_4=4a_3+2a_5$，又 $a_1\neq0$，所以 $q^2-3q+2=0$，

解得 $q=2$ 或 $q=1$（舍去）.

$S_8=\dfrac{a_1(1-q^8)}{1-q}$，$S_2=\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}$，

故 $\dfrac{S_8}{S_2}=\dfrac{1-q^8}{1-q^2}=\dfrac{1-2^8}{1-2^2}=85$. **故选** C.

4. A 【解析】设$\{a_n\}$的公比为 q. 由已知可得 $2a_4=a_1+a_3-a_1$，则 $q=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{1}{2}$. 由 $\dfrac{a_1\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\right]}{1-\dfrac{1}{2}}>\dfrac{31}{16}a_1$，$a_1<0$，可得 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k>\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$，解得 $k<5$，故 $k_{\max}=4$.

故选 A.

5. D 【解析】设该等比数列为$\{a_n\}$，其项数为 $2n(n\in\mathbf{N}_+)$，公比为 q，

由题意易知 $q\neq1$ 且 $q\neq-1$，

设奇数项之和为 $S_{奇}$，偶数项之和为 $S_{偶}$，

易知奇数项组成的数列是首项为 a_1，公比为 q^2 的等比数列，

偶数项组成的数列是首项为 a_2，公比为 q^2 的等比数列，

则 $S_{奇}=\dfrac{a_1(1-q^{2n})}{1-q^2}=1\ 011$，$S_{偶}=\dfrac{a_2(1-q^{2n})}{1-q^2}=2\ 022$，

所以$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2\ 022}{1\ 011}=2$，即 $q=2$，

所以这个数列的公比为 2. **故选** D.

6. $\dfrac{1}{2}$ 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的奇数项之和与偶数项之和分别为 $S_{奇}$，$S_{偶}$.

由题意可得 $\begin{cases}S_{奇}+S_{偶}=240,\\ S_{奇}-S_{偶}=80,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}S_{奇}=160,\\ S_{偶}=80,\end{cases}$ 所以 $q=\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{1}{2}$.

7. 7 【解析】因为数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+\dfrac{3}{2^n}}$，则 $a_{n+1}^2-a_n^2=\dfrac{3}{2^n}$，

当 $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}_+$ 时，$a_n^2=a_1^2+(a_2^2-a_1^2)+(a_3^2-a_2^2)+\cdots+(a_n^2-a_{n-1}^2)=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{3}{2^{n-1}}=1+\dfrac{\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=4-\dfrac{3}{2^{n-1}}$，

经检验，$a_1^2=1$ 也满足上式，故对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$，$a_n^2=4-\dfrac{3}{2^{n-1}}$，

故 $b_1=a_1^2-[a_1^2]=0$，$b_2=a_2^2-[a_2^2]=4-\dfrac{3}{2}-\left[4-\dfrac{3}{2}\right]=\dfrac{5}{2}-2=\dfrac{1}{2}$，

当 $n\geqslant 3$ 时，$2^{n-1}\geqslant 4$，则 $0<\dfrac{3}{2^{n-1}}<1$，所以 $3<4-\dfrac{3}{2^{n-1}}<4$，

此时 $b_n=a_n^2-[a_n^2]=4-\dfrac{3}{2^{n-1}}-\left[4-\dfrac{3}{2^{n-1}}\right]=4-\dfrac{3}{2^{n-1}}-3=1-\dfrac{3}{2^{n-1}}$，

所以 $S_{10}=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{10}=0+\dfrac{1}{2}+8-\left(\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{3}{2^9}\right)=\dfrac{1}{2}+8-\dfrac{\frac{3}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^8}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}+8-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2^9}=7+\dfrac{3}{2^9}$，

所以$[S_{10}]=7$.

8.【解】(1)当 $n=1$ 时,$a_1^2=2a_1$,因为 $a_n>0$,所以 $a_1=2$,当 $n=2$ 时,$a_1(a_1+a_2)=3a_2$,将 $a_1=2$ 代入,得 $a_2=4$.

(2)因为 $2S_n=(n+1)a_n$,所以 $2S_{n+1}=(n+2)a_{n+1}$,

两式相减,得 $2a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n$,即 $na_{n+1}=(n+1)a_n$,

故$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$,所以$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是常数列,

所以$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=2$,故 $a_n=2n$.

(3)$a_n\cdot a_{2^n}=2n\cdot 2\cdot 2^n=n\cdot 2^{n+2}$,

故 $T_n=1\times2^3+2\times2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n+1}+n\cdot 2^{n+2}$,

$2T_n=1\times2^4+2\times2^5+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n+2}+n\cdot 2^{n+3}$,

两式相减,得 $T_n=n\cdot 2^{n+3}-(2^3+2^4+\cdots+2^{n+2})=n\cdot 2^{n+3}-\frac{2^3-2^{n+3}}{1-2}=(n-1)\cdot 2^{n+3}+8$.

§3 节测上分

1. B 【解析】依题意,$a^2=-9b>0$,则 $b<0$,因为 $b^2=ac=(-9)\times(-1)=9$,所以 $b=-3$,$ac=9$. **故选** B.

2. A 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,$q\neq1$,由题得 $2a_1=a_2+a_3$,则 $2=q+q^2$,所以 $q^2+q-2=0$,解得 $q=-2$,所以 $S_4=\frac{1-(-2)^4}{1-(-2)}=-5$. **故选** A.

3. B 【解析】当 $q=1$ 时,$a_1=a_2=a_3=1$,所以 $S_3=3$.

当 $q\neq1$ 时,由 $S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=3$,解得 $q=-2$.

所以"$S_3=3$"是"$q=-2$"的必要不充分条件. **故选** B.

4. C 【解析】由题可知,$a_n\neq0$,$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}(n\in\mathbf{N}_+)$,

则数列$\{a_n\}$为等比数列,又 $a_2a_3=72$,

所以 $a_1a_4=72$,

则 $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}$

$=\frac{a_2a_3a_4+a_1a_3a_4+a_1a_2a_4+a_1a_2a_3}{a_1a_2a_3a_4}$

$=\frac{a_2a_3(a_4+a_3+a_2+a_1)}{72\times72}$

$=\frac{45}{72}=\frac{5}{8}$. **故选** C.

5. B 【**解析**】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $S_8+S_{24}=140$，且 $S_{24}=13S_8$，

所以 $S_8=10, S_{24}=130$，故 $q\neq\pm1$，

所以$\frac{S_{24}}{S_8}=\frac{1-q^{24}}{1-q^8}=(q^8)^2+q^8+1=13$，即

$(q^8)^2+q^8-12=0$，

解得 $q^8=3$ 或 $q^8=-4$（舍去），

所以$\frac{S_{16}}{S_8}=\frac{1-q^{16}}{1-q^8}=q^8+1=4$，则 $S_{16}=40$.

故选 B.

一题多解 由题意，可得 $S_8=10$，$S_{24}=130$，易知 $q\neq-1$. 设 $S_{16}=x$，因为 $S_8, S_{16}-S_8, S_{24}-S_{16}$ 成等比数列，所以 $(x-10)^2=10(130-x)$，即 $x^2-10x-1\ 200=0$，解得 $x=40$ 或 $x=-30$. 当 $S_{16}=-30$ 时，不可能满足 $S_8=10, S_{24}=130$，故舍去，所以 $S_{16}=40$，**故选** B.

6. ABD 【**解析**】由 $a_{n+1}+a_n=3\cdot2^n$，可得 $a_{n+1}-2^{n+1}=2^n-a_n=-(a_n-2^n)$，

又 $a_1-2^1=-1$，所以 $\{a_n-2^n\}$ 是首项为-1，公比为-1 的等比数列，

所以 $a_n-2^n=(-1)^n$，则 $a_n=2^n+(-1)^n$，**故 A 正确，C 错误**.

$\frac{a_n}{2^n}-1=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，则$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-1=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

所以$\frac{\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-1}{\frac{a_n}{2^n}-1}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=-\frac{1}{2}$，又$\frac{a_1}{2^1}-1=-\frac{1}{2}$，所以数列$\left\{\frac{a_n}{2^n}-1\right\}$是首项为$-\frac{1}{2}$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，**故 B 正确**.

因为 $a_n=2^n+(-1)^n$，所以 $S_{2\,025}=2^1+2^2+\cdots+2^{2\,025}+[-1+(-1)^2+\cdots+(-1)^{2\,025}]=\dfrac{2\times(1-2^{2\,025})}{1-2}-1=2^{2\,026}-2-1=2^{2\,026}-3$，**故 D 正确.**

故选 ABD.

7. ACD 【解析】由 $a_{n+1}=4a_n-3a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$，可知 $a_{n+1}-a_n=3(a_n-a_{n-1})$.

由题可知，$a_2-a_1=3$，所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首项为 3，公比为 3 的等比数列，**故 A 正确.**

由题可知，$a_3=4a_2-3a_1=13$，$a_4=4a_3-3a_2=40$，则 $a_2-2a_1=2$，$a_3-2a_2=5$，$a_4-2a_3=14$，显然数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 的前 3 项 2，5，14 不能构成等差数列，**故 B 错误.**

由 A 选项分析可知，$a_{n+1}-a_n=3^n$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$，

所以 $a_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\dfrac{1-3^n}{1-3}=\dfrac{3^n-1}{2}(n\geqslant 2)$，$a_1=1$ 也符合上式，所以 $a_n=\dfrac{3^n-1}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$，**故 C 正确.**

由 C 选项分析可知，$S_n=\dfrac{(3-1)+(3^2-1)+(3^3-1)+\cdots+(3^n-1)}{2}=\dfrac{3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n}{2}$，

所以 $S_n=\dfrac{\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}-n}{2}=\dfrac{3^{n+1}-2n-3}{4}$，**故 D 正确. 故选 ACD.**

8. A 【解析】记第 n 个 30 分钟小明和小吉走的级数分别为 a_n，b_n，

则 $a_1=1\ 500$，$b_1=1\ 500$，且 $a_n-a_{n-1}=-150(n\geqslant 2)$，$b_n=0.9b_{n-1}(n\geqslant 2)$，

故数列 $\{a_n\}$ 是以 1 500 为首项，-150 为公差的等差数列，

$\{b_n\}$ 是以 1 500 为首项，0.9 为公比的等比数列，

所以 $a_n=1\ 500-150(n-1)=-150n+$

$1\ 650, b_n=1\ 500\times0.9^{n-1}$.

设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$前 n 项和分别为 S_n,T_n,则

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

$=\frac{n[1\ 500+(-150n+1\ 650)]}{2}$

$=-75n^2+1\ 575n$,

$T_n=\frac{1\ 500(1-0.9^n)}{1-0.9}=15\ 000(1-0.9^n)$.

因为 $S_5=-75\times5^2+1\ 575\times5=6\ 000<6\ 666$,$S_6=-75\times6^2+1\ 575\times6=6\ 750>6\ 666$,

而 $a_6=-150\times6+1\ 650=750$,故第 6 个 30 分钟小明每分钟走的级数为 $\frac{750}{30}=25$,

所以小明登上最高峰所需时间为 $5\times30+\frac{666}{25}=176.64$(分钟).

因为 $T_5=15\ 000\times(1-0.9^5)\approx15\ 000\times(1-0.59)=6\ 150<6\ 666$,

$T_6=15\ 000\times(1-0.9^6)\approx15\ 000\times(1-0.53)=7\ 050>6\ 666$,

而 $b_6=1\ 500\times0.9^5\approx885$,故第 6 个 30 分钟小吉每分钟走的级数为 $\frac{885}{30}=29.5$,

所以小吉登上最高峰所需时间为 $5\times30+\frac{6\ 666-6\ 150}{29.5}\approx167.49$(分钟).

$176.64-167.49=9.15$(分钟),

所以小吉到达最高峰的时间比小明早,但差距不超过 20 分钟. **故选 A.**

9. AC 【解析】对于 A,$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均为等比数列且公比相同,设公比为 $q(q\neq0,1)$,由题知 $a_1\neq b_1$,则 $a_n=a_1q^{n-1}$,$b_n=b_1q^{n-1}$,显然 $a_k\neq b_k$,所以集合 M 为空集,**故 A 正确.**

对于 B,$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均为等差数列且公差不同,设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公差分别为 d_1,d_2,且 $d_1\neq d_2$,则 $a_n=a_1+(n-1)d_1$,

$b_n=b_1+(n-1)d_2$，若 $a_k=b_k$，则 $k=\frac{a_1-b_1}{d_2-d_1}+1$，因为 $k\in\mathbf{N}_+$，所以集合 M 中最多只有一个元素，**故 B 错误.**

对于 C，设 $a_n=mn+b(m\neq0)$，$b_n=b_1q^{n-1}(q\neq0,1)$，若 $a_k=b_k$，则 $mk+b=b_1q^{k-1}$，

当 $q>0$ 且 $q\neq1$ 时，表示 $\{b_n\}$ 的点在 $y=b_1q^{x-1}$ 的图象上，表示 $\{a_n\}$ 的点在 $y=mx+b$ 的图象上，根据 $y=b_1q^{x-1}$ 和 $y=mx+b$ 的图象，可得关于 k 的方程 $mk+b=b_1q^{k-1}$ 至多有 2 个不同的解.

当 $q<0$ 且 $q\neq-1$ 时，表示 $\{b_n\}$ 的点在 $y=b_1q^{x-1}$ 的图象上，表示 $\{a_n\}$ 的点在 $y=mx+b$ 的图象上，根据 $y=b_1\cdot q^{x-1}$ 与 $y=mx+b$ 图象，可得关于 k 的方程 $mk+b=b_1q^{k-1}$ 至多有 3 个不同的解. 当 $q=-1$ 时，$b_n=(-1)^{n-1}b_1$，易知此时 M 中最多有 2 个元素. **故 C 正确.**

对于 D，$\{a_n\}$ 为递增数列，$\{b_n\}$ 为递减数列，则两数列的图象可以没有交点，**故 D 错误. 故选 AC.**

10. $\pm\sqrt{10}$ **【解析】**因为 $a_1a_5+a_8a_{10}=8$，数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $a_3^2+a_9^2=8$，又 $a_3a_9=1$，所以 $2a_3a_9=2$，所以 $a_3^2+2a_3a_9+a_9^2=8+2$，

即 $(a_3+a_9)^2=10$，所以 $a_3+a_9=\pm\sqrt{10}$.

11. (1)**【解】**$b_2=a_3+5=2a_2+1+5=2a_2+6=2(a_1+2)+6=8$.

(2)**【证明】**由题得，$a_{2n+1}=2a_{2n}+1=2(a_{2n-1}+2)+1=2a_{2n-1}+5$，

则 $a_{2n+1}+5=2a_{2n-1}+10=2(a_{2n-1}+5)$，又因为 $b_1=a_1+5=4$，

所以 $\{b_n\}$ 是等比数列，且公比为 2，首项为 4.

(3)**【解】**由(2)知，$b_n=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$，

设 $c_n=nb_n=n\cdot2^{n+1}$，

则 $S_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+n\times2^{n+1}$①，

$2S_n=1\times2^3+2\times2^4+\cdots+(n-1)\times2^{n+1}+n\times2^{n+2}$②，

由①－②得，$-S_n=2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}-$

$n\cdot 2^{n+2}=\frac{4(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+2}=(1-n)2^{n+2}-4$,

故 $S_n=2^{n+2}(n-1)+4$.

12.【解】(1)由 $\{a_0\}$ 为 $-2,1,2$,得 $\{a_1\}$ 为 $-2,-1,1,3,2$,故 $P_1=5,S_1=3$.

$\{a_2\}$ 为 $-2,-3,-1,0,1,4,3,5,2$,故 $P_2=9,S_2=9$.

$\{a_3\}$ 为 $-2,-5,-3,-4,-1,-1,0,1,1,5,4,7,3,8,5,7,2$,故 $P_3=17,S_3=27$.

(2)因为数列经一次扩充后是在原来数列的相邻两项中增加一项,

所以经第 $(n+1)$ 次扩充后增加的项数为 P_n-1,

因此 $P_{n+1}=P_n+P_n-1=2P_n-1$,所以 $P_{n+1}-1=2(P_n-1)$,

因为 $P_1=5$,所以数列 $\{P_n-1\}$ 是以 4 为首项,2 为公比的等比数列,

所以 $P_n-1=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$,即 $P_n=2^{n+1}+1$.

设经过第 n 次扩充后数列的各项为 $-2,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_t,2$,

则 $S_n=-2+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_t+2$,因为扩充规则为每相邻两项之间插入这两项的和,

所以 $S_{n+1}=-2+(-2+a_1)+a_1+(a_1+a_2)+a_2+(a_2+a_3)+a_3+\cdots+a_t+(a_t+2)+2=(-2)\times 2+3a_1+3a_2+3a_3+\cdots+3a_t+2\times 2$,

可得 $S_{n+1}=3S_n-(-2+2)=3S_n$,

又 $S_1=3$,因此 $\{S_n\}$ 是首项为 3,公比为 3 的等比数列,故 $S_n=3^n$.

(3)由(2)可知 $P_n\log_3 S_n=(2^{n+1}+1)\log_3 3^n=n(2^{n+1}+1)=n\cdot 2^{n+1}+n$,

所以 $T_n=(1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n+1})+(1+2+\cdots+n)=(1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n+1})+\frac{n(n+1)}{2}$.

令 $M=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$,则 $2M=1\times 2^3+2\times 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n+1}+n\cdot 2^{n+2}$,

两式相减可得 $-M=2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}-n\cdot 2^{n+2}=\frac{2^2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+2}=(1-n)2^{n+2}-4$，

所以 $M=(n-1)2^{n+2}+4$，

则 $T_n=(n-1)2^{n+2}+\frac{n(n+1)}{2}+4$.

§4 数列的应用

4.1 数列在日常经济生活中的应用+4.2 数列的其他应用

对点上分

1. $S_n=0.01n^2+0.99n+20$ 【解析】∵ 购车后第 1 年支出电费共 2 000 元，以后每一年都比前一年增加 200 元，

∴ 购车后，每年支出的电费（单位：元）构成等差数列，其首项为 2 000，公差为 200，

∴ 购买该种型号汽车第 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 年支出的电费 $a_n=200n+1\ 800$（元），

∴ 购买该种型号汽车 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 年后共支出的电费为

$\frac{n(200n+1\ 800+2\ 000)}{2}=100n^2+1\ 900n$（元），

∵ 每年养护保险费均为 8 000 元，购置费共 20 万元，

∴ 购买该种型号汽车 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 年后共支出费用

$S_n=20+0.8n+\frac{100n^2+1\ 900n}{10\ 000}=0.01n^2+0.99n+20$（万元）.

2. D 【解析】设 $a_0=8\ 000$，从 2024 年 4 月至 2025 年 2 月每个月月底用于下个月进货的资金依次记为 $a_1,a_2,\cdots,a_{11}$，设 2025 年 3 月底扣除生活费，但未还贷款的资金为 a_{12}.

由题知，$a_1=a_0\times(1+20\%)-800=1.2a_0-800$，同理可得 $a_{n+1}=1.2a_n-800$

$(1 \leqslant n \leqslant 11, n \in \mathbf{N}_+)$,

所以 $a_{n+1}-4\ 000=1.2(a_n-4\ 000)(1 \leqslant n \leqslant 11, n \in \mathbf{N}_+)$,

而 $a_1-4\ 000=4\ 800$,所以数列 $\{a_n-4\ 000\}(1 \leqslant n \leqslant 12, n \in \mathbf{N}_+)$ 是首项为 $4\ 800$,公比为 1.2 的等比数列,

所以 $a_n-4\ 000=4\ 800 \times 1.2^{n-1}(1 \leqslant n \leqslant 12, n \in \mathbf{N}_+)$,即 $a_n=4\ 800 \times 1.2^{n-1}+4\ 000(1 \leqslant n \leqslant 12, n \in \mathbf{N}_+)$,

所以 $a_{12}=4\ 800 \times 1.2^{11}+4\ 000 \approx 4\ 800 \times 7.4+4\ 000=39\ 520$,

所以他这一年的收入约为 $39\ 520-8\ 000=31\ 520$(元),**故选 D.**

3. $\frac{4}{9}$　$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

思路导引 根据给定条件,将正方体 8 个顶点分成两层,求出质点移动到同层内的相邻顶点的概率及移动到另一层的相邻顶点的概率,即可得到 p_2;再根据递推关系,利用构造法求出数列的通项公式即可得解.

【解析】 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点可分为两层,上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的 4 个顶点为一层,下底面 $ABCD$ 内的 4 个顶点为一层,

每个顶点上都有 3 条棱连接到相邻顶点,质点移动方向等可能,概率均为 $\frac{1}{3}$,

因此质点移动到同层内相邻顶点的概率为 $\frac{2}{3}$,移动到另一层相邻顶点的概率为 $\frac{1}{3}$,可得 $p_2=\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}+\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}=\frac{4}{9}$.

第 n 秒$(n \in \mathbf{N}_+)$后,质点位于平面 $ABCD$ 的概率为 p_n,位于平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的概率为 $(1-p_n)$,

则 $p_n=\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}(1-p_{n-1})=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}$，即 $p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(p_{n-1}-\frac{1}{2}\right)(n\geqslant 2)$，

而 $p_1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$，

于是数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{6}$ 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$，即 $p_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$.

4. ABC 【**解析**】对等额本金还款的方案，设每月应还款金额为 a_n 万元，则 $a_1=1+12\times 0.3\%=1.036$，$a_2=1+11\times 0.3\%=1.033$，$\cdots$，$a_{12}=1+1\times 0.3\%=1.003$，即最后一个月应还款金额为 10 030 元，所以应还利息总额为 $0.3\%\times(1+2+3+\cdots+12)=0.3\%\times\frac{12\times(1+12)}{2}=0.234$（万元），即按等额本金还款的方案，应还利息总额为 2 340 元，**故 B，C 正确；**

对等额本息还款的方案，设第 n 个月的贷款利息为 b_n 万元，偿还本金为 c_n 万元，则 $b_1=12\times 0.3\%=0.036$，$b_2=(12-c_1)\times 0.3\%=0.036-0.3\%\cdot c_1$，

$c_2=b_1+c_1-b_2=(1+0.3\%)\cdot c_1$，

$b_3=(12-c_1-c_2)\times 0.3\%=0.036-0.3\%\cdot(c_1+c_2)$，

$c_3=b_2+c_2-b_3=(1+0.3\%)^2\cdot c_1$，

同理可得 $c_4=(1+0.3\%)^3\cdot c_1$，

$c_5=(1+0.3\%)^4\cdot c_1,\cdots$，

$c_{12}=(1+0.3\%)^{11}\cdot c_1$，

所以 $\{c_n\}$ 是以 c_1 为首项，$(1+0.3\%)$ 为公比的等比数列.

其前 12 项的和为 $\frac{c_1[1-(1+0.3\%)^{12}]}{1-(1+0.3\%)}=12\Rightarrow c_1=\frac{-0.036}{1-1.003^{12}}\approx\frac{0.036}{0.0366}\approx 0.9836$.

所以每月应还款金额为 $b_1+c_1=0.036+0.9836=1.0196$(万元),所还利息总和为 $1.0196\times12-12=0.2352$(万元),**故 A 正确**;

又 $0.2352>0.234$,所以等额本息还款的利息多,**故 D 错误**.

故选 ABC.

5. (1)2 330 (2)85.19 【解析】(1)设第 n 个月付款 a_n 元,则 $a_n=80+[2000-80(n-1)]\times0.5\%=90.4-0.4n$,所以 25 个月共付款 $90\times25-0.4\times\frac{25(25-1)}{2}=2130$(元),所以购买这件商品实际付款 $200+2130=2330$(元);

(2)设每月应还款 x 元,按复利计算 2 000 元贷款经过 25 个月连本带息增值为 $2000(1+0.5\%)^{25}$ 元.

则 $x(1+0.5\%)^{24}+x(1+0.5\%)^{23}+\cdots+x=2000(1+0.5\%)^{25}$,

可得 $\frac{x[1-(1+0.5\%)^{25}]}{1-(1+0.5\%)}=2000\times(1+0.5\%)^{25}$,

整理可得 $x=\frac{2000(1+0.5\%)^{25}\times0.5\%}{(1+0.5\%)^{25}-1}\approx\frac{2000\times1.133\times0.005}{1.133-1}\approx85.19$(元),

所以每月应还款金额为 85.19 元.

专题上分 1 数列求通项

1. B

攻略上分 本题已知的等式中,同时含有 S_n 和 a_n,可以利用通法攻略 10 中,已知 $f(a_n,S_n)=0$ 消去 S_n 型求解.

【解析】依题意,当 $n=1$ 时,$a_2^2-a_2=2S_1=6$,即 $a_2^2-a_2-6=0$,解得 $a_2=-2$(舍)或 $a_2=3$.

当 $n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}_+$ 时,由 $a_{n+1}^2-a_{n+1}=2S_n$,可得 $a_n^2-a_n=2S_{n-1}$,两式作差得 $a_{n+1}^2-a_n^2-a_{n+1}+a_n=2a_n$,整理得$(a_{n+1}+$

$a_n)(a_{n+1}-a_n-1)=0$,由题意可知 $a_{n+1}+a_n>0$,

提示:数列$\{a_n\}$是正项数列

所以 $a_{n+1}-a_n=1(n\geqslant 2)$,且 $a_2-a_1=0$ 不满足 $a_{n+1}-a_n=1$,所以数列$\{a_n\}$从第二项开始是以 1 为公差的等差数列,故 $a_{10}=a_2+8=3+8=11$. **故选 B.**

2.【**解**】(1)数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1=1$,$S_n=2-2a_{n+1}$,

当 $n=1$ 时,$a_1=2-2a_2=1$,

所以 $a_2=\dfrac{1}{2}$,当 $n\geqslant 2$ 时,由 $S_n=2-2a_{n+1}$,可得 $S_{n-1}=2-2a_n$,

两式相减得 $a_n=2a_n-2a_{n+1}$,得到 $a_n=2a_{n+1}(n\geqslant 2)$,

又 $a_1=1\neq 0$,$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{2}$,满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$,所以数列$\{a_n\}$是首项为 1,公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列,所以 $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1)知 $\dfrac{1}{a_n}=2^{n-1}$,所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前 12 项和 $T_{12}=\dfrac{1\times(1-2^{12})}{1-2}=2^{12}-1=4\ 095$.

3. A　【**解析**】当 $n\geqslant 2$ 时,在等式 $a_n-4a_{n-1}=-\dfrac{4^n}{n(n-1)}$两边同时除以 4^n 后得$\dfrac{a_n}{4^n}-\dfrac{a_{n-1}}{4^{n-1}}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}$,

故有$\begin{cases}\dfrac{a_2}{4^2}-\dfrac{a_1}{4}=-1+\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{a_3}{4^3}-\dfrac{a_2}{4^2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3},\\ \cdots\\ \dfrac{a_n}{4^n}-\dfrac{a_{n-1}}{4^{n-1}}=-\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n},\end{cases}$

上述等式累加得$\dfrac{a_n}{4^n}-1=-1+\dfrac{1}{n}$,即$\dfrac{a_n}{4^n}=\dfrac{1}{n}$,所以 $a_n=\dfrac{4^n}{n}(n\geqslant 2)$.

又当 $n=1$ 时，$a_1=4$ 满足 $a_n=\frac{4^n}{n}$，故 $a_n=\frac{4^n}{n}$，**故选 A.**

4. C 【解析】依题意，$a_{n+1}-a_n=\frac{n(n+1)-2}{n(n+1)}=1-\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)=\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}+1$，

提示：将 $\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$ 化为 $\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}+1$ 的形式，其目的是方便求和相消，也是利用累加法求通项的关键

所以当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_1+\left(\frac{2}{2}-2+1\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{2}+1\right)+\cdots+\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n-1}+1\right)=a_1+\frac{2}{n}-2+(n-1)$，

因为 $a_{12}=\frac{73}{6}$，所以 $a_1+\frac{2}{12}-2+11=\frac{73}{6}$，

即 $a_1=3$，所以 $a_n=\frac{2}{n}+n(n\geqslant2)$，所以 $a_2=\frac{2}{2}+2=3$. **故选 C.**

5. A 【解析】当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}$，

即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

提示：符合累乘法的形式，经过变形后可累乘

所以 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{1}$，$\frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{2}$，$\frac{a_4}{a_3}=\frac{5}{3}$，…，$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n}{n-2}$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

累乘得 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，

又 $a_1=1$，所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}(n\geqslant2)$，

当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{1\times(1+1)}{2}=1$，符合

上式，

所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$，**故选** A.

6. B 【解析】在 $a_n=(n+2)(a_{n+1}-a_n)$ 中，取 $n=1$，可得 $a_1=3(a_2-a_1)$，代入 $a_2=2$，解得 $a_1=\frac{3}{2}$，

又由 $a_n=(n+2)(a_{n+1}-a_n)$ 可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+3}{n+2}$，

于是 $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}=\frac{n+2}{2}(n\geqslant2)$，

故 $a_{2\,024}=\frac{2\,024+2}{2}=1\,013$. **故选** B.

7. C

攻略上分 题目中已知的等式 $a_{n+1}=2a_n-3$ 符合大招攻略 11 中的 $a_{n+1}=pa_n+q(p,q$ 为常数，$pq\neq0$，$p\neq1)$ 的形式，因为本题给的等式较为简单，可以考虑直接构造出等比数列，若不方便观察，则可以通过待定系数法构造等比数列.

【解析】因为 $a_{n+1}=2a_n-3$，

所以 $a_{n+1}-3=2(a_n-3)$.

因为 $a_1-3=1\neq0$，所以数列 $\{a_n-3\}$ 是首项为 1，

公比为 2 的等比数列，所以 $a_n-3=2^{n-1}$，所以 $a_n=2^{n-1}+3$，故 $a_{211}=2^{210}+3$.

故选 C.

8. C 【解析】因为 $\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}-a_n}=2n$，所以 $a_{n+1}+a_n=2n(a_{n+1}-a_n)$，

即 $a_{n+1}(2n-1)=a_n(2n+1)$，所以 $\frac{a_{n+1}}{2n+1}=\frac{a_n}{2n-1}$，

故数列 $\left\{\frac{a_n}{2n-1}\right\}$ 为常数列，故

$\frac{a_{2\,025}}{2\times2\,025-1}=a_1=1$，

因此 $a_{2\,025}=4\,049$. **故选** C.

9. A

攻略上分 题目中已知的等式 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{3a_n-1}$ 符合大招攻略 11 中的 $a_{n+1}=\dfrac{ka_n}{pa_n+q}$($k,p,q$ 为非零常数, $a_n\neq0$)的形式,因此可以利用取倒数构造法构造出等比数列求解.

【解析】易知 $a_n\neq0$,从而由题意得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a_n}$,即 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_n}-1\right)$,又 $\dfrac{1}{a_1}-1=-\dfrac{1}{2}\neq0$,

所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$ 是以 $-\dfrac{1}{2}$ 为首项, $-\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列,从而 $\dfrac{1}{a_n}-1=-\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$,所以 $\dfrac{1}{a_9}-1=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^9$,解得 $a_9=\dfrac{512}{511}$. **故选** A.

10. B 【解析】当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=2a_1-2$,解得 $a_1=2$.

当 $n\geqslant2$ 时,由 $S_n=2a_n-2^n$,可得 $S_{n-1}=2a_{n-1}-2^{n-1}$,两式作差可得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}-2^{n-1}$,整理可得 $a_n-2a_{n-1}=2^{n-1}$,

将 $a_n-2a_{n-1}=2^{n-1}$ 两边同时除以 2^n 可得 $\dfrac{a_n}{2^n}-\dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2}$,

所以数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{a_1}{2}=1$,公差为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列,

故 $\dfrac{a_n}{2^n}=1+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+1}{2}$,

所以 $a_n=(n+1)\cdot2^{n-1}$.

故 $5a_8=5\times9\times2^7=45\times2^7$, $4a_9=4\times10\times2^8=80\times2^7$,故 $5a_8<4a_9$, A **错误**, B **正确**.

由题意可得 $S_n=2a_n-2^n=(n+1)\cdot2^n-2^n=n\cdot2^n$,所以 $5S_8=5\times8\times2^8=80\times2^7=4a_9$, C, D **错误**. **故选** B.

专题上分 2 数列求和

1. B 【解析】因为 $S_{10}=S_{11}$，所以 $a_{11}=0$，

提示：由 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$，可得 $S_{11}-S_{10}=a_{11}$

由 $a_{11}=a_1+10d=a_1-20=0$，得 $a_1=20$，

所以 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=-n^2+21n$. **故选** B.

2. C 【解析】由题意，2025 年存的 2 000 元共存了 10 年，本息和为 $0.2\times(1+0.02)^{10}$ 万元，

2026 年存的 2 000 元共存了 9 年，本息和为 $0.2\times(1+0.02)^9$ 万元，

…

2034 年存的 2 000 元共存了 1 年，本息和为 $0.2\times(1+0.02)^1$ 万元，

所以到 2035 年 3 月 1 日将之前所有存款及利息全部取回，他可取回的钱为 $0.2\times(1+0.02)^{10}+0.2\times(1+0.02)^9+\cdots+0.2\times(1+0.02)=0.2\times\dfrac{1.02\times(1.02^{10}-1)}{1.02-1}\approx0.2\times\dfrac{1.02\times(1.219-1)}{0.02}=2.2338\approx2.2$（万元），**故选** C.

3. D

> **攻略上分** 根据给定函数 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，得 $f(x)+f(1-x)=1$，可用倒序相加法求和.

【解析】由函数 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，得 $f(x)+f(1-x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4}{4+2\times4^x}=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{2}{2+4^x}=1$，

令 $S=f\left(\dfrac{1}{2\,025}\right)+f\left(\dfrac{2}{2\,025}\right)+f\left(\dfrac{3}{2\,025}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2\,024}{2\,025}\right)$，则 $S=f\left(\dfrac{2\,024}{2\,025}\right)+f\left(\dfrac{2\,023}{2\,025}\right)+f\left(\dfrac{2\,022}{2\,025}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1}{2\,025}\right)$，

两式相加得 $2S=\left[f\left(\frac{1}{2\ 025}\right)+f\left(\frac{2\ 024}{2\ 025}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2\ 025}\right)+f\left(\frac{2\ 023}{2\ 025}\right)\right]+\left[f\left(\frac{3}{2\ 025}\right)+f\left(\frac{2\ 022}{2\ 025}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{2\ 024}{2\ 025}\right)+f\left(\frac{1}{2\ 025}\right)\right]$,

则 $2S=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{2\ 024个1}=2\ 024$,解得 $S=1\ 012$. 故选 D.

4. $\frac{2\ 025}{2}$ 【解析】因为 $S_{2\ 025}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2\ 025}$,则 $S_{2\ 025}=a_{2\ 025}+\cdots+a_3+a_2+a_1$,

所以 $2S_{2\ 025}=(a_1+a_{2\ 025})+(a_2+a_{2\ 024})+(a_3+a_{2\ 023})+\cdots+(a_{2\ 025}+a_1)$,

又 $a_k+a_{2\ 026-k}=1(k\in\mathbf{N}_+,k\leqslant 2\ 025)$,所以 $a_1+a_{2\ 025}=a_2+a_{2\ 024}=a_3+a_{2\ 023}=\cdots=a_{2\ 025}+a_1=1$,

所以 $2S_{2\ 025}=2\ 025$,则 $S_{2\ 025}=\frac{2\ 025}{2}$.

5. $\frac{2\ 025}{2}$ 【解析】数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{2n}{n+1}$①,

当 $n=1$ 时,$\frac{1}{S_1}=1$,所以 $a_1=S_1=1$,

当 $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}_+$ 时,由 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{n-1}}+\frac{1}{S_n}=\frac{2n}{n+1}$,可得 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{n-1}}=\frac{2n-2}{n}$②,

① - ② 得 $\frac{1}{S_n}=\frac{2n}{n+1}-\frac{2(n-1)}{n}=\frac{2n^2-2(n-1)(n+1)}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}(n\geqslant 2)$,

所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}(n\geqslant 2)$,$S_1=1$ 也满足 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$,故对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$,$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

当 $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}_+$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n$,$a_1=1$ 也满足

$a_n=n$,故对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$,$a_n=n$.

因为 $f(1-x)+f(x)=\cos[\pi(1-x)]+\frac{1}{2}+\cos\pi x+\frac{1}{2}=-\cos\pi x+\cos\pi x+1=1$,

记 $S=f\left(\frac{1}{2\ 026}\right)+f\left(\frac{2}{2\ 026}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\ 025}{2\ 026}\right)$,则 $S=f\left(\frac{2\ 025}{2\ 026}\right)+f\left(\frac{2\ 024}{2\ 026}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2\ 026}\right)$,

所以 $2S=\left[f\left(\frac{1}{2\ 026}\right)+f\left(\frac{2\ 025}{2\ 026}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2\ 026}\right)+f\left(\frac{2\ 024}{2\ 026}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{2\ 025}{2\ 026}\right)+f\left(\frac{1}{2\ 026}\right)\right]=2\ 025\times1=2\ 025$,

故 $S=\frac{2\ 025}{2}$.

6. **攻略上分** 题目已知数列$\{b_n\}$是分奇偶项表示的,并且求出数列$\{a_n\}$的通项公式后,可知数列$\{b_n\}$中的奇数项和偶数项都是等差数列,分组求和即可得到$\{b_n\}$的前$2n$项和.

【解】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

由 $S_4=4S_2$,$a_{2n}=2a_n+1$,

得$\begin{cases}4a_1+6d=4(2a_1+d),\\a_1+(2n-1)d=2[a_1+(n-1)d]+1,\end{cases}$

化简得$\begin{cases}d=2a_1,\\d=a_1+1,\end{cases}$ 解得 $a_1=1$,$d=2$,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-1$.

(2)由 $a_n=2n-1$,

得 $b_n=\begin{cases}2n-3,n\text{ 为奇数},\\4n+6,n\text{ 为偶数},\end{cases}$

则 $T_{2n}=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$

$=[-1+3+7+\cdots+(4n-5)]+[14+22+30+\cdots+(8n+6)]$

$=\frac{(-1+4n-5)\cdot n}{2}+\frac{(14+8n+6)\cdot n}{2}=$

$6n^2+7n$.

7.【解】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，

由已知可得$a_1+3d+a_1+7d=26$，$b_1q+b_1q^3=10$，

$\therefore a_1+5d=3+5d=13$，$(q-2)(q^2+2q+5)=0$，解得$d=2$.

$\because q^2+2q+5>0$，$\therefore q=2$.

$\therefore a_n=2n+1(n\in\mathbf{N}_+)$，$b_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)令$2^4<2n+1<2^5$，得$\dfrac{15}{2}<n<\dfrac{31}{2}$，又

$\because n\in\mathbf{N}_+$，$\therefore n=8,9,10,\cdots,15$，

$\therefore$ 在区间$(2^4,2^5)$内，数列$\{a_n\}$有8项.

(3)$\because b_6=2^5>a_{15}=31>b_5=2^4$，$\therefore$ 数列$\{c_n\}$的前20项中数列$\{a_n\}$有15项，数列$\{b_n\}$有5项，

$\therefore S_{20}=3\times15+\dfrac{15\times14}{2}\times2+\dfrac{1\times(1-2^5)}{1-2}=255+31=286$.

8. 攻略上分 数列$\{b_n\}$的通项公式中出现$(-1)^{n+1}$，不重叠的相邻两项之和组成的新数列是等差数列，方便求和，故考虑通过将b_{2n}和b_{2n-1}并在一起求和.

【解】(1)$\because 2S_n=(n+1)a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，

$\therefore 2S_{n-1}=na_{n-1}(n\geqslant2)$，

两式相减得$2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$，即$(n-1)a_n=na_{n-1}$，

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}(n\geqslant2)$，$\therefore \dfrac{a_n}{n}-\dfrac{a_{n-1}}{n-1}=0$，

$\therefore$ 数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是常数列，

$\because \dfrac{a_1}{1}=1$，$\therefore \dfrac{a_n}{n}=1$，$\therefore a_n=n$.

(2)由(1)知$b_n=(-1)^{n+1}a_n^2=(-1)^{n+1}n^2$，$\therefore b_{2n-1}+b_{2n}=(2n-1)^2-(2n)^2=-4n+1$，

$\therefore$ 当$n\geqslant2$时，$(b_{2n-1}+b_{2n})-(b_{2n-3}+b_{2n-2})=-4n+1-[-4(n-1)+1]=-4$，

又 $b_1+b_2=-3$,

$\therefore$ 数列 $\{b_{2n}+b_{2n-1}\}$ 是以 -3 为首项, -4 为公差的等差数列.

$\therefore T_{2n}=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{2n-1}+b_{2n})=-3n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times(-4)=-2n^2-n.$

9. (1)【解】在正项数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $a_n-a_{n+1}=a_{n+1}a_n$, 得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$,

因此数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{a_1}=2$, 公差为 1 的等差数列, 所以 $\dfrac{1}{a_n}=2+(n-1)=n+1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n+1}$.

(2)【证明】由(1)知 $a_na_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$,

所以 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}$,

而数列 $\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}\right\}$ 是递增数列, 且 $0<\dfrac{1}{n+2}\leqslant\dfrac{1}{3}$, 则 $\dfrac{1}{6}\leqslant\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{1}{2}$,

所以 $\dfrac{1}{6}\leqslant a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}<\dfrac{1}{2}$.

10.

攻略上分 数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n-2}\right\}$ 的通项公式符合通法攻略 14 中的模型, 通过裂项相消法求和后证明不等式, 注意裂项后拆出的系数.

(1)【解】已知数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 由 a_1, a_2-6, a_3 成等比数列, 得 $(a_2-6)^2=a_1a_3$,

即 $(a_1+d-6)^2=a_1(a_1+2d)$,

$\therefore (d+6)^2=12(12+2d)$,

$\therefore d^2-12d-108=(d-18)(d+6)=0$,

$\therefore d=18$ 或 $d=-6$, $\because d>0$, $\therefore d=18$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=12+18(n-1)=18n-6$.

(2)【证明】由(1)得，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(12+18n-6)}{2}=n(9n+3)$，

$\therefore S_n-2=n(9n+3)-2=9n^2+3n-2=(3n-1)(3n+2)$，

$\therefore \frac{1}{S_n-2}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$，

$\therefore T_n=\frac{1}{S_1-2}+\frac{1}{S_2-2}+\cdots+\frac{1}{S_n-2}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3(3n+2)}$.

$\therefore T_n<\frac{1}{6}$.

11. (1)【解】由 $3a_{n+1}^2+2a_{n+1}a_n-a_n^2=0(n\in\mathbf{N}_+)$，得 $(3a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=0$，

$\because a_n>0$，

$\therefore 3a_{n+1}-a_n=0$，即 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，且首项与公比都为 $\frac{1}{3}$，$\therefore a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(2)【证明】$b_n=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\right]\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+1\right]}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+1}-\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$，

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}-\frac{1}{\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3+1}-\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}+\cdots+\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+1}-\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+1}-\frac{1}{\frac{1}{3}+1}<1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，

即 $b_1+b_2+\cdots+b_n<\frac{1}{4}$.

方法总结 用裂项相消法求和的裂项原则及消项规律

(1)裂项原则:一般是前边裂几项,后边就裂几项,直到发现被消去项的规律为止.

(2)消项规律:消项后前边剩几项,后边就剩几项,前边剩第几项,后边就剩倒数第几项.

注意:利用裂项相消法求和时,既要注意检验通项公式裂项前后是否等价,又要注意求和时,消去了哪些项,保留了哪些项,切不可漏写未被消去的项.

12.

攻略上分 数列$\{a_n\}$是等比数列,数列$\{b_n\}$是等差数列,数列$\{a_nb_n\}$符合"等差×等比"的形式,通过错位相减法即可求和.

【解】(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,

则$q^3=\dfrac{a_5}{a_2}=\dfrac{16}{2}=8$,

故$q=2$,则$a_1=\dfrac{a_2}{q}=\dfrac{2}{2}=1$,

故$a_n=2^{n-1}$.

(2)$b_1=a_3=2^2=4$,$b_2=a_4=2^3=8$,

则等差数列$\{b_n\}$的公差为4,所以数列$\{b_n\}$的通项公式$b_n=4+4(n-1)=4n$.

则$S_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=4\times2^0+8\times2^1+\cdots+4n\times2^{n-1}$,

$2S_n=4\times2^1+8\times2^2+\cdots+4n\times2^n$,

两式相减得$-S_n=4+4\times2^1+4\times2^2+\cdots+4\times2^{n-1}-4n\times2^n=\dfrac{4(1-2^n)}{1-2}-4n\times2^n=2^{n+2}-4-n\times2^{n+2}=-(n-1)\times2^{n+2}-4$,

故$S_n=(n-1)\times2^{n+2}+4$.

13.【解】(1)由a_1,a_2+1,a_3成等差数列,

得$2(a_2+1)=a_1+a_3$,

又因为$\{a_n\}$的公比为2,所以$2(a_1\times2+1)=a_1+a_1\times2^2$,解得$a_1=2$,所以$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$.

(2)由(1)知 $a_n=2^n$,所以 $\frac{n+1}{a_n}=\frac{n+1}{2^n}=(n+1)\times\frac{1}{2^n}$,

则 $S_n=2\times\frac{1}{2^1}+3\times\frac{1}{2^2}+\cdots+n\times\frac{1}{2^{n-1}}+(n+1)\times\frac{1}{2^n}$①,

所以 $\frac{1}{2}S_n=2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\times\frac{1}{2^n}+(n+1)\times\frac{1}{2^{n+1}}$②,

①-②得 $\frac{1}{2}S_n=2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-(n+1)\times\frac{1}{2^{n+1}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-(n+1)\times\frac{1}{2^{n+1}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-(n+1)\times\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$,

所以 $S_n=3-\frac{n+3}{2^n}$.

14.【解】(1)$\because a_2=2,S_n=a_{n+1}-1$,$\therefore$ 当 $n=1$ 时,有 $a_1=S_1=a_2-1=1$,

当 $n\geqslant2$ 时,有 $S_{n-1}=a_n-1$,$\therefore S_n-S_{n-1}=a_{n+1}-a_n$,$\therefore a_n=a_{n+1}-a_n$,$\therefore a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$,

又 $a_2=2a_1$,也符合上式,故数列$\{a_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列,

$\therefore a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)$\because B_n=n^2-10n$,$\therefore$ 当 $n=1$ 时,$b_1=B_1=-9$,当 $n\geqslant2$ 时,有 $B_{n-1}=(n-1)^2-10(n-1)$,$\therefore B_n-B_{n-1}=2n-11=b_n(n\geqslant2)$,又 $b_1=-9$ 也符合上式,所以 $b_n=2n-11(n\in\mathbf{N}_+)$.

$\therefore$ 当 $n\leqslant5$ 时,$b_n<0$,当 $n\geqslant6$ 时,$b_n>0$,

提示:根据数列$\{b_n\}$的通项公式研究数列$\{b_n\}$各项正负情况,进而求$\{|b_n|\}$的前 n 项和 T_n

$\therefore$ 当 $n\leqslant 5$ 时, $T_n=-b_1-b_2-\cdots-b_n=-B_n=10n-n^2$,

当 $n\geqslant 6$ 时, $T_n=-b_1-b_2-\cdots-b_5+b_6+b_7+\cdots+b_n=B_n-2B_5=n^2-10n+50$.

故 $T_n=\begin{cases}10n-n^2, n\leqslant 5,\\ n^2-10n+50, n\geqslant 6,\end{cases}$ $n\in\mathbf{N}_+$.

专题上分 3 数列中的奇偶项问题

1. ACD 【解析】当 $n=1$ 时, $a_2=2a_1=2$, $a_1=1$, 当 $n=2$ 时, $a_3=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2}$, 当 $n=3$ 时, $a_4=2a_3=1$.

若 n 为奇数, 则 $n+1, n+3$ 为偶数, $n+2, n+4$ 为奇数, 则 $a_{n+1}=2a_n$, $a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2a_n}$, $a_{n+3}=2a_{n+2}=\frac{1}{a_n}$, $a_{n+4}=\frac{1}{a_{n+3}}=a_n$;

若 n 为偶数, 则 $n+1, n+3$ 为奇数, $n+2, n+4$ 为偶数, 则 $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}$, $a_{n+2}=2a_{n+1}=\frac{2}{a_n}$, $a_{n+3}=\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{a_n}{2}$, $a_{n+4}=2a_{n+3}=a_n$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为周期的周期数列.

$a_{2\,025}=a_1=1$, A 正确;

$S_{15}=S_{16}-a_{16}=4\times\left(1+2+\frac{1}{2}+1\right)-1=17$, B 错误;

$S_{4n+1}=n\left(1+2+\frac{1}{2}+1\right)+1=\frac{9}{2}n+1$, $\{S_{4n+1}\}$ 是公差为 $\frac{9}{2}$ 的等差数列, C 正确;

因为 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的周期数列, $3(n+4)$ 与 $3n$ 除以 4 所得余数相等, 所以 D 正确. 故选 ACD.

2. $\{20, 21\}$ 【解析】当 n 为奇数时, $a_{n+2}=a_n+2$, 即数列 $\{a_n\}$ 中的奇数项构成首项为 $a_1=1$, 公差为 2 的等差数列;

当 n 为偶数时，$a_{n+2}=2a_n$，即数列$\{a_n\}$中的偶数项构成首项为 $a_2=2$，公比为 2 的等比数列.

显然数列$\{a_n\}$中的每一项均为正整数，数列$\{S_n\}$为递增数列.

当 n 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}_+)$，则 $S_{2k-1}=k+\dfrac{2k\cdot(k-1)}{2}+\dfrac{2(1-2^{k-1})}{1-2}=k^2+2^k-2$，

当 n 为偶数时，设 $n=2k(k\in\mathbf{N}_+)$，则 $S_{2k}=k+\dfrac{2k\cdot(k-1)}{2}+\dfrac{2(1-2^k)}{1-2}=k^2+2^{k+1}-2$，

又 $S_{19}=10^2+2^{10}-2=100+1\ 024-2=1\ 122$，$S_{20}=10^2+2^{11}-2=100+2\ 048-2=2\ 146$，

$S_{21}=11^2+2^{11}-2=121+2\ 048-2=2\ 167$，

$S_{22}=11^2+2^{12}-2=4\ 215$，

所以满足 $2\ 025\leqslant S_m\leqslant 3\ 000$ 的正整数 m 的所有取值集合为$\{20,21\}$.

3. **攻略上分** 由已知数列$\{a_{n+1}\}$的通项公式是一个分奇偶的递推式，符合 $a_n=\begin{cases}f(n),n\text{ 为奇数},\\g(n),n\text{ 为偶数}\end{cases}$型，根据大招攻略 16 中的方法可以求出$\{a_n\}$的前 n 项和.

(1)【证明】若 n 为奇数，则 $n+1$ 是偶数，$n+2$ 是奇数，

所以 $a_{n+1}=a_n+1$，$a_{n+2}=(a_n+1)+2=a_n+3$，即 $a_{n+2}-a_n=3$，

所以$\{a_n\}$的奇数项是首项为 1，公差为 3 的等差数列.

(2)【解】当 $n=2k(k\in\mathbf{N}_+)$时，

$S_n=S_{2k}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k})$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1})+(a_1+1+a_3+1+a_5+1+\cdots+a_{2k-1}+1)$

$=2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1})+k$

$=2\left[ka_1+\dfrac{k(k-1)}{2}\times3\right]+k$

$=3k^2=3\times\left(\frac{n}{2}\right)^2$

$=\frac{3}{4}n^2.$

因为 $a_{2k}=a_{2k-1}+1=a_1+3(k-1)+1=3k-1$,

所以当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}_+)$时,$S_n=S_{2k-1}=S_{2k}-a_{2k}=3k^2-3k+1=3\times\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-3\times\frac{n+1}{2}+1=\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}.$

综上所述,$S_n=\begin{cases}\frac{3}{4}n^2, n \text{ 为偶数},\\ \frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}, n \text{ 为奇数}.\end{cases}$

4. C

攻略上分 由已知 $a_{n+1}+a_n=2n+3$ 符合 $a_{n+1}+a_n=f(n)$ 型,根据大招攻略 16 中的方法,判断数列 $\{a_n\}$ 的偶数项成等差数列,找到 $a_{2\,024}$ 与 a_2 的关系,结合 a_1+a_2 的取值,求得 $a_1+a_{2\,024}$ 的值.

【解析】由 $a_{n+1}+a_n=2n+3$①,得 $a_{n+2}+a_{n+1}=2n+5$②,

由②−①得 $a_{n+2}-a_n=2$,所以数列 $\{a_n\}$ 的偶数项是以 2 为公差的等差数列.

则 $a_{2\,024}=a_2+2\times\left(\frac{2\,024}{2}-1\right)=a_2+2\,022$,所以 $a_1+a_{2\,024}=a_1+a_2+2\,022$,

根据 $a_{n+1}+a_n=2n+3$,有 $a_1+a_2=5$,所以 $a_1+a_{2\,024}=5+2\,022=2\,027$.

故选 C.

5. 512 【解析】因为 $a_na_{n+1}=2^n(n\in\mathbf{N}_+)$,所以 $a_{n+1}a_{n+2}=2^{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$,

所以$\frac{a_{n+2}}{a_n}=2, n\in\mathbf{N}_+$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的偶数项成等比数列,公比为 2.

因为 $a_na_{n+1}=2^n$,所以 $a_1a_2=2$,

又因为 $a_1=2$,所以 $a_2=1$,

故 $a_{2n}=a_2\cdot 2^{n-1}$,所以 $a_{20}=1\times 2^9=512$.

6. 攻略上分 符合大招攻略16中含$(-1)^n$型，通过构造隔项递推式求解.

【解】(1) 由已知条件可知，对任意的$n\in\mathbf{N}_+$，$a_n>0$.

当$n=1$时，$a_1^2+a_1=2S_1=2a_1$，解得$a_1=1$或$a_1=0$(舍去).

当$n\geqslant2$时，由$2S_n=a_n^2+a_n$，可得$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$，两式作差得$2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，即$a_n^2-a_{n-1}^2-a_n-a_{n-1}=0$，

即$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，

由已知条件可知$a_n+a_{n-1}>0$，所以$a_n-a_{n-1}=1$，

所以数列$\{a_n\}$是等差数列，且首项为1，公差为1，因此$a_n=1+(n-1)\times1=n$.

(2) 由(1)可得$b_n=\frac{a_n-1}{a_n}-\frac{a_n}{a_n+1}=\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}=\left(1-\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$，

所以$T_n=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=-1+\frac{1}{n+1}=-\frac{n}{n+1}$.

(3) 因为$c_{n+1}+(-1)^nc_n=2a_n+1$，所以$c_{2n}-c_{2n-1}=4n-1$①，$c_{2n+1}+c_{2n}=4n+1$②，$c_{2n+2}-c_{2n+1}=4n+3$③，

②-①得$c_{2n+1}+c_{2n-1}=2$，②+③得$c_{2n+2}+c_{2n}=8n+4$.

提示：根据已知条件，构造隔项递推式

又$c_2-c_1=3$，所以$c_2=c_1+3$，

当$n=2k(k\in\mathbf{N}_+)$时，$d_n=A_{4k}=2k+12k+\frac{k(k-1)}{2}\times16=8k^2+6k$，

当$n=2k-1(k\in\mathbf{N}_+)$时，$d_n=A_{4k-2}=c_1+c_2+2(k-1)+20(k-1)+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\times16=8k^2-2k-3+2c_1$.

提示：分奇偶项得到d_n的表达式

又因为 $d_n=A_{2n}$，当 $n\in\mathbf{N}_+$ 时，$d_{n+1}>d_n$，所以当 $n=2k(k\in\mathbf{N}_+$ 时，$d_{2k+1}>d_{2k}\Rightarrow A_{4k+2}>A_{4k}\Rightarrow 8(k+1)^2-2(k+1)-3+2c_1>8k^2+6k$，

当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$d_{2k}>d_{2k-1}\Rightarrow A_{4k}>A_{4k-2}\Rightarrow 8k^2+6k>8k^2-2k-3+2c_1$，

所以对任意的 $k\in\mathbf{N}_+$，$\begin{cases}c_1>-4k-\dfrac{3}{2},\\ c_1<4k+\dfrac{3}{2}\end{cases}$ 恒成立，故 $-\dfrac{11}{2}<c_1<\dfrac{11}{2}$.

提示：根据 $d_{n+1}>d_n$，可得出关于 c_1 的不等式组，由此可求得 c_1 的取值范围

专题上分4 数列与其他知识的综合问题

1. 攻略上分 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$ 不方便直接求和，可通过放缩，使其可以通过裂项相消法求和.

(1)【解】∵ $\{a_n\}$ 是各项均不为 0 的等差数列，∴ $a_n^2=S_{2n-1}=\dfrac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}=\dfrac{(2n-1)\cdot 2a_n}{2}$，

∴ $a_n=2n-1$.

(2)【解】∵ $b_n=(-1)^n a_n=(-1)^n(2n-1)$，

∴ 当 n 为偶数时，$T_n=-1+3-5+7-\cdots+(-1)^n(2n-1)=2\times\dfrac{n}{2}=n$，

当 n 为奇数时，$T_n=-1+3-5+7-\cdots+(-1)^n(2n-1)=2\times\dfrac{n-1}{2}-(2n-1)=-n$，

综上可得 $T_n=(-1)^n n$.

(3)【证明】当 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{a_1^2}=1<\dfrac{5}{4}$，当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{1}{a_n^2}=\dfrac{1}{(2n-1)^2}<\dfrac{1}{4n(n-1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$，

$\therefore \dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\dfrac{1}{a_3^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2}<1+\dfrac{1}{4}\times\Bigg(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-$

$\left.\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{5}{4}(n\geqslant2)$,

$\therefore \frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}<\frac{5}{4}$.

2. C 【解析】因为 a_2,a_{10} 是函数 $f(x)=x^2+6x+4$ 的两个零点，所以 a_2,a_{10} 是方程 $x^2+6x+4=0$ 的两个根，由一元二次方程根与系数的关系得 $a_2+a_{10}=-6$，$a_2a_{10}=4$，所以 a_2,a_{10} 均为负数.

又因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $a_6^2=a_2\cdot a_{10}=4$，又 a_2,a_6 同号，所以 $a_6=-2$. **故选** C.

3. B 【解析】由 $a_1=1,S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}$，得 $a_2=-\frac{1}{2}$，所以公比为 $-\frac{1}{2}$，故 $S_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

由 $S_n-(-1)^n\cdot A>0$，可得 $\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]-(-1)^n\cdot A>0$,

提示：当 n 为奇数、偶数时，对应情况不一样，注意分类讨论

当 n 为奇数时，$\frac{2}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+A>0$，

故 $A>-\frac{2}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$，由于函数 $f(n)=-\frac{2}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right](n=2k-1,k\in\mathbf{N}_+)$ 单调递增，当 $n\to+\infty$ 时，$f(n)\to-\frac{2}{3}$，故 $A\geqslant-\frac{2}{3}$，

当 n 为偶数时，$\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-A>0$，

故 $A<\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$，由于函数 $g(n)=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right](n=2k,k\in\mathbf{N}_+)$ 单调递增，当 $n=2$ 时，此时 $g(n)=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ 取最小值 $\frac{1}{2}$，故 $A<\frac{1}{2}$，

综上可得 $-\frac{2}{3}\leqslant A<\frac{1}{2}$. **故选** B.

4. B 【解析】由 $a_{2n}=a_{2n-1}+2^n$，则 $a_2=a_1+2=2$，可得 $a_1=0$，

又 $a_{2n+1}=a_{2n-1}+2^n+\cos n\pi$，所以 $a_3=a_1+2+\cos\pi$，$a_5=a_3+2^2+\cos 2\pi$，$a_7=a_5+2^3+\cos 3\pi$，…，$a_{2\,025}=a_{2\,023}+2^{1\,012}+\cos 1\,012\pi$，

所以 $a_{2\,025}=2^1+2^2+\cdots+2^{1\,012}+\cos\pi+\cos 2\pi+\cdots+\cos 1\,012\pi=\dfrac{2\times(1-2^{1\,012})}{1-2}+(-1+1-1+1-\cdots-1+1)=2^{1\,013}-2$. **故选 B.**

5. BCD 【解析】由题意得，$a_n\cos n\pi+a_{n+1}=n$，

即 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=n$，$n\in\mathbf{N}_+$，

所以 $a_{2n}-a_{2n-1}=2n-1$，$a_{2n+1}+a_{2n}=2n$，$a_{2n+2}-a_{2n+1}=2n+1$，$n\in\mathbf{N}_+$，

可得 $a_{2n+1}+a_{2n-1}=1$，$a_{2n+2}+a_{2n}=4n+1$，

提示：由此可得数列中相邻奇数项的和与相邻偶数项的和

其中 $a_2-a_1=1$，a_2+a_1 的值不确定.

对于 A，$S_{102}=a_1+a_2+(a_3+a_5)+(a_7+a_9)+\cdots+(a_{99}+a_{101})+(a_4+a_6)+(a_8+a_{10})+\cdots+(a_{100}+a_{102})$，其中 a_1+a_2 的值不确定，**故 A 错误；**

对于 B，$S_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}=(a_1+a_3)+(a_5+a_7)+\cdots+(a_{97}+a_{99})+(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+\cdots+(a_{98}+a_{100})$，每一组数都可以确定，**故 B 正确；**

对于 D，$a_2+a_{100}=(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+\cdots+(a_{98}+a_{100})-[(a_4+a_6)+(a_8+a_{10})+\cdots+(a_{96}+a_{98})]$，每一组数都可以确定，**故 D 正确；**

对于 C，因为 $a_{2n+1}+a_{2n}=2n$，所以 $(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{102}+a_{103})$ 的值可以确定，

因为 $S_{104}=(a_1+a_3)+(a_5+a_7)+\cdots+(a_{101}+a_{103})+(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+\cdots+(a_{102}+a_{104})$，每一组数都可以确定，所以 $a_1+a_{104}=S_{104}-[(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{102}+a_{103})]$ 的值可以确定，**故 C 正确. 故选 BCD.**

6.【解】(1) 第 3 次传球之前球在甲手中的情形可分为：甲→乙→甲或甲→丙→甲，所以 $p_3=\dfrac{1}{2}$；

第 3 次传球之前球在乙手里的情形为甲→丙→乙，所以 $q_3=\frac{1}{4}$.

故 $p_3+2q_3=1$.

(2) 由题意知 $\begin{cases}p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}(1-p_n-q_n),\\ q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}(1-p_n-q_n),\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}p_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n,\\ q_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}q_n,\end{cases}$

所以 $p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$，$p_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，所以 $\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $\frac{2}{3}$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列，

故 $p_n-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow p_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

同理 $\left\{q_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{3}$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列，所以 $q_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow q_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

又 $p_8=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^7$，$q_8=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^7$，$p_8<\frac{1}{3}$，$q_8>\frac{1}{3}$，所以 $p_8<q_8$.

*§5　数学归纳法

对点上分

1.【证明】①当 $n=1$ 时，左边 $=1\times2\times3\times\cdots\times k$，右边 $=\frac{1\times(1+1)\times\cdots\times(1+k-1)(1+k)}{k+1}=1\times2\times3\times\cdots\times k$，即等式成立.

②假设当 $n=m(m\in\mathbf{N}_+)$ 时，等式成立，即有 $1\times2\times3\times\cdots\times k+2\times3\times4\times\cdots\times(k+1)+\cdots+m(m+1)\cdots(m+k-1)=\frac{m(m+1)\cdots(m+k)}{k+1}$，

则当 $n=m+1$ 时，

$1\times2\times3\times\cdots\times k+2\times3\times4\times\cdots\times(k+1)+\cdots+$

$m(m+1)\cdots(m+k-1)+(m+1)(m+2)\cdots(m+k)$

$=\dfrac{m(m+1)\cdots(m+k)}{k+1}+(m+1)(m+2)\cdots(m+k)$

$=\dfrac{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}{k+1}(m+k+1)$

$=\dfrac{(m+1)[(m+1)+1]\cdots[(m+1)+k]}{k+1}$,

即当 $n=m+1$ 时,等式成立.

根据①和②可知,原等式对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

2.【证明】①当 $n=1$ 时,左边 $=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12}>1$,左边>右边,不等式成立;

②假设 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时不等式成立,

即 $\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\cdots+\dfrac{1}{3k+1}>1$,

则当 $n=k+1$ 时,左边 $=\dfrac{1}{k+2}+\cdots+\dfrac{1}{3k+1}+\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3(k+1)}+\dfrac{1}{3(k+1)+1}=\left(\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\cdots+\dfrac{1}{3k+1}\right)-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3(k+1)}+\dfrac{1}{3(k+1)+1}>1+\left[\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3k+4}-\dfrac{2}{3(k+1)}\right]=1+\dfrac{6(k+1)}{9k^2+18k+8}-\dfrac{6(k+1)}{9k^2+18k+9}>1$,

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

由①②可知,原不等式成立.

3.【证明】①当 $n=1$ 时,$f(1)=(2\times1+7)\times3^1+9=36$,能被 36 整除;

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时,$f(k)=(2k+7)\cdot3^k+9$ 能被 36 整除,

当 $n=k+1$ 时,$f(k+1)=[2(k+1)+7]\cdot3^{k+1}+9=3[(2k+7)\cdot3^k+9]+18(3^{k-1}-1)=3f(k)+18(3^{k-1}-1)$,

因为 $3^{k-1}-1$ 是偶数,所以 $18(3^{k-1}-1)$ 能被 36 整除,

又因为 $f(k)$ 能被 36 整除,所以 $f(k+1)$ 能被 36 整除,

由①②知,对一切 $n\in\mathbf{N}_+$,$f(n)$ 能被 36 整除.

4.【解】(1)由已知条件得 $2b_n=a_n+a_{n+1}$，$a_{n+1}^2=b_nb_{n+1}$，

所以 $2b_1=a_1+a_2$，$a_2^2=b_1b_2$，可得 $a_2=6$，$b_2=9$，

由 $2b_2=a_2+a_3$，$a_3^2=b_2b_3$，可得 $a_3=12$，$b_3=16$，

由 $2b_3=a_3+a_4$，$a_4^2=b_3b_4$，可得 $a_4=20$，$b_4=25$.

(2)由(1)可以猜想 $a_n=n(n+1)$，$b_n=(n+1)^2$.

下面用数学归纳法证明：

①当 $n=1$ 时，由 $a_1=2$，$b_1=4$ 可得结论成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时猜想成立，

即 $a_k=k(k+1)$，$b_k=(k+1)^2$.

则当 $n=k+1$ 时，

$a_{k+1}=2b_k-a_k=2(k+1)^2-k(k+1)=k^2+3k+2=(k+1)(k+2)$，

$b_{k+1}=\dfrac{a_{k+1}^2}{b_k}=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{(k+1)^2}=(k+2)^2$，

因此当 $n=k+1$ 时，结论也成立.

由①②知，对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 都有 $a_n=n(n+1)$，$b_n=(n+1)^2$ 成立.

真题上分

1. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\because$ $S_5=5a_1+10d$，$S_{10}=10a_1+45d$，$S_5=S_{10}$，

$\therefore$ $5a_1+10d=10a_1+45d$，即 $a_1=-7d$.

$\because$ $a_5=a_1+4d=1$，$\therefore$ $d=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$ $a_1=-7d=\dfrac{7}{3}$. **故选 B.**

快解 $\because$ $S_5=S_{10}$，$\therefore$ $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=0$，$\therefore$ $5a_8=0$，$\therefore$ $a_8=0$.

$\because$ $a_5=1$，$a_8=0$，$\therefore$ 公差 $d=-\dfrac{1}{3}$，则 $a_1=a_5-4d=\dfrac{7}{3}$，**故选 B.**

2. B 【解析】记 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $S_3=6$，$S_5=-5$，

所以 $\begin{cases}3a_1+3d=6,\\5a_1+10d=-5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=5,\\d=-3\end{cases}$ (另解：因为 $S_3=\frac{3\times(a_1+a_3)}{2}=\frac{3\times 2a_2}{2}=3a_2=6$，所以 $a_2=2$；

因为 $S_5=\frac{5\times(a_1+a_5)}{2}=\frac{5\times 2a_3}{2}=5a_3=-5$，所以 $a_3=-1$，

所以 $d=a_3-a_2=-3$，

所以 $a_1=a_2-d=5$)，

所以 $S_6=6a_1+15d=6\times5+15\times(-3)=-15$（另解：$a_6=a_2+4d=2-12=-10$，$S_6=a_6+S_5=-10-5=-15$）. **故选 B.**

一题多解 因为 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，所以设 $S_n=An^2+Bn$，

由 $S_3=6$，$S_5=-5$，得 $\begin{cases}9A+3B=6,\\25A+5B=-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=-\frac{3}{2},\\B=\frac{13}{2},\end{cases}$

所以 $S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{2}n$，所以 $S_6=-\frac{3}{2}\times36+\frac{13}{2}\times6=-15$. **故选 B.**

3. AD 【解析】根据题意，由 $\begin{cases}S_3=7,\\a_3=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=7①,\\a_1q^2=1②,\end{cases}$ ①÷②得 $\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1=7$，化简得 $6q^2-q-1=0$，解得 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=-\frac{1}{3}$（舍去），**故 A 正确；**

由 A 可知 $q=\frac{1}{2}$，则 $a_1=\frac{a_3}{q^2}=4$，因此 $a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

则 $a_5=4\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$ (另解：$a_5=a_3\cdot q^2=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$)，**故 B 错误；**

$S_5=\frac{4\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{4}$，**故 C 错误**；

$a_n+S_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{4\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}+8-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=8$，**故 D 正确. 故选 AD.**

一题多解 对于 A，由 $S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{a_3}{q^2}+\frac{a_3}{q}+a_3=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1=7$，整理得 $6q^2-q-1=0$，解得 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=-\frac{1}{3}$（舍去），**故 A 正确**；对于 C，因为 $S_3=7$，$a_4=a_3q=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$a_5=a_4q=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以 $S_5=S_3+a_4+a_5=7+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{31}{4}$，**故 C 错误.**

4. 95 **【解析】**设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

$\because a_3+a_4=7,3a_2+a_5=5$，

$\therefore \begin{cases}2a_1+5d=7,\\4a_1+7d=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-4,\\d=3.\end{cases}$ $\therefore a_n=3n-7$，

$\therefore S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10\times(-4+23)}{2}=95.$

一题多解 $\because \{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_3+a_4=7$，

$\therefore \begin{cases}a_2+a_5=7,\\3a_2+a_5=5,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a_2=-1,\\a_5=8.\end{cases}$

$\therefore$ 公差 $d=\frac{8-(-1)}{3}=3$，

$\therefore a_n=a_2+(n-2)d=-1+3(n-2)=3n-7$，$\therefore S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10\times(-4+23)}{2}=95.$

5. 2 【解析】设该等比数列为$\{a_n\}$且公比为$q(q>0)$.

关键点 由等比数列的各项均为正数，可知公比$q>0$

若$q=1$，则$S_8=2S_4=8\neq 68$，所以$q\neq 1$.

提示：使用等比数列前n项和公式时，先考虑公比是否为1

根据题意可得$\begin{cases} S_4=\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=4, \\ S_8=\dfrac{a_1(1-q^8)}{1-q}=68, \end{cases}$解得$q=2$(负值舍去).

一题多解 由解析可知，该数列的公比q是不为1的正数，则$S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8,\cdots$成公比为$q^4$的等比数列，所以$\dfrac{S_8-S_4}{S_4}=\dfrac{68-4}{4}=q^4$，解得$q=2$(负值舍去).

快解 由解析可知，该数列的公比q是不为1的正数，由已知可得$S_8=S_4+q^4S_4=4+4q^4=68$，

提示：等比数列$\{a_n\}$中，$S_{m+n}=S_m+q^mS_n=S_n+q^nS_m$，$m,n\in\mathbf{N}_+$

解得$q=2$(负值舍去).

6.【解】(1)$b_1=a_2=a_1+1=2$，$b_2=a_4=a_3+1=a_2+2+1=5$.

$\because 2n$为偶数，$\therefore a_{2n+1}=a_{2n}+2$，$a_{2n+2}=a_{2n+1}+1$，

$\therefore a_{2n+2}=a_{2n}+3$，即$b_{n+1}=b_n+3$，且$b_1=2$，

$\therefore\{b_n\}$是以2为首项，3为公差的等差数列，$\therefore b_n=3n-1$.

(2)当n为奇数时，$a_n=a_{n+1}-1$，

$\therefore\{a_n\}$的前20项和为

$a_1+a_2+\cdots+a_{20}$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})$

$=[(a_2-1)+(a_4-1)+\cdots+(a_{20}-1)]+(a_2+$

$a_4+\cdots+a_{20})$

$=2(a_2+a_4+\cdots+a_{20})-10.$

提示：由 $b_n=a_{2n}$ 知可将 a_n 中 n 为奇数的情况转化求解

由(1)可知，$a_2+a_4+\cdots+a_{20}=b_1+b_2+\cdots+b_{10}=2\times10+\frac{10\times9}{2}\times3=155$，

$\therefore \{a_n\}$ 的前 20 项和为 $2\times155-10=300.$

7.【解】(1)因为 $4S_n=3a_n+4$，所以 $4S_{n+1}=3a_{n+1}+4$，两式相减得 $4a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n$，即 $a_{n+1}=-3a_n$.

又因为 $4S_1=3a_1+4$，所以 $a_1=4$，故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 4，公比为 -3 的等比数列.

所以 $a_n=4\cdot(-3)^{n-1}$.

(2)由(1)及题意得，$b_n=(-1)^{n-1}na_n=4n\cdot3^{n-1}$，所以 $T_n=4(1\cdot3^0+2\cdot3^1+3\cdot3^2+\cdots+n\cdot3^{n-1})$，

$3T_n=4(1\cdot3^1+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots+n\cdot3^n)$，两式相减可得 $-2T_n=4(1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\cdot3^n)=4\left(\frac{1-3^n}{1-3}-n\cdot3^n\right)=(2-4n)3^n-2$，

所以 $T_n=(2n-1)3^n+1$.

一题多解 (2)由(1)及题意，得 $b_n=(-1)^{n-1}na_n=4n\cdot3^{n-1}$，所以当 $n\geqslant2$ 时，$T_n=T_{n-1}+4n\cdot3^{n-1}$，两边同时减去 $(2n-1)3^n$，得 $T_n-(2n-1)3^n=T_{n-1}-(2n-3)3^{n-1}$，故 $\{T_n-(2n-1)3^n\}$ 为常数列.

所以 $T_n-(2n-1)3^n=T_1-(2\times1-1)\cdot3=1$，所以 $T_n=(2n-1)3^n+1$，$n\geqslant2$. 当 $n=1$ 时，$T_1=b_1=4$，满足上式，所以 $T_n=(2n-1)3^n+1$.

8.【解】(1) $2S_n=na_n$ ①，

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$ ②，

由①−②得，$2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}$，

即 $(n-1)a_{n-1}=(n-2)a_n$.

当 $n=2$ 时，$a_1=0$；

当 $n\geqslant 3$ 时，$\frac{a_{n-1}}{n-2}=\frac{a_n}{n-1}$.

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$\left\{\frac{a_n}{n-1}\right\}$ 为常数列，$\therefore \frac{a_n}{n-1}=\frac{a_2}{1}=1$，$\therefore a_n=n-1(n\geqslant 2)$.

由 $2S_n=na_n$，当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1$，$a_1=0=1-1$.

$\therefore a_n=n-1(n\in\mathbf{N}_+)$.

一题多解 (1) 当 $n=1$ 时，$2S_1=a_1$，

即 $2a_1=a_1$，$\therefore a_1=0$.

当 $n\geqslant 2$ 时，由 $2S_n=na_n$，①

得 $2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$，②

①−②得 $2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}$，

整理得 $(n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}$，

$\because a_2=1$，$\therefore$ 当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n\neq 0$，

$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2}(n\geqslant 3)$，

当 $n\geqslant 3$ 时，

由累乘法得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}=\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}$，$\therefore \frac{a_n}{a_2}=n-1$.

又 $a_2=1$，$\therefore a_n=n-1(n\geqslant 3)$，当 $n=1$，$n=2$ 时，$a_1=0$，$a_2=1$ 满足上式，

故 $a_n=n-1$.

(2) 由 (1) 知，$\frac{a_{n+1}}{2^n}=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ③，

$\frac{1}{2}T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ④，

由③−④得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

$\therefore T_n=2-(2+n)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

9. (1)【解】由题知,数列$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是首项为1,公差为$\frac{1}{3}$的等差数列,所以$\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$,

所以 $S_n=\frac{n+2}{3}a_n$.

当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=\frac{n+1}{3}a_{n-1}$,

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{3}a_n-\frac{n+1}{3}a_{n-1}$,所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$,

所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{1}\cdot1=\frac{(n+1)n}{2}$.

当 $n=1$ 时,$a_1=1$ 满足上式,所以 $a_n=\frac{(n+1)n}{2}$.

提示:不要忽略验证 $n=1$ 是否满足

一题多解 (1)由上知$\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_{n-1}}{n-1}(n\geqslant2)$,

所以$\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)n}(n\geqslant2)$,

所以$\left\{\frac{a_n}{n(n+1)}\right\}$为常数列,

又$\frac{a_1}{1\times2}=\frac{1}{2}$,

所以$\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{1}{2}$,

所以 $a_n=\frac{n^2+n}{2}$.

(2)【证明】由(1)知,$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{(n+1)n}=2\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}<2$.

10.【解】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d $(d\neq0)$,则$\begin{cases}a_1+2d=5a_1+10d,\\(a_1+d)(a_1+3d)=4a_1+6d,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-4,\\d=2,\end{cases}$ 则 $a_n=-4+(n-1)\times2=2n-6$.

(2)结合(1)可知,$S_n=-4n+\dfrac{n(n-1)\times2}{2}=n^2-5n$,则 $S_n>a_n$ 等价于 $n^2-5n>2n-6$,

解得 $n<1$ 或 $n>6$,又 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $n\geqslant7$,

故使 $S_n>a_n$ 成立的 n 的最小值为 7.

一题多解 (1)由 $a_3=S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3$,解得 $a_3=0$,则 $S_4=\dfrac{4(a_1+a_4)}{2}=2(a_2+a_3)=2a_2$,因此 $a_2a_4=2a_2$.

因为数列$\{a_n\}$的公差不为 0,所以 $a_2\neq0$,则 $a_4=2$,因此数列$\{a_n\}$的公差为 $a_4-a_3=2$,从而 $a_n=0+(n-3)\times2=2n-6$.

(2)因为 $S_1=a_1$,所以由 $S_n>a_n$ 得 $n\geqslant2$,且 $S_n-a_n>0$,即 $S_{n-1}>0$,则 $S_{n-1}=\dfrac{(a_1+a_{n-1})(n-1)}{2}>0$,则 $a_1+a_{n-1}=-4+2(n-1)-6>0$,解得 $n>6$.

又 $n\in\mathbf{N}_+$,所以使得 $S_n>a_n$ 的 n 的最小值为 7.

11. (1)【解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 $b_n=\begin{cases}a_n-6,n\text{ 为奇数},\\2a_n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 所以 $b_1=a_1-6$, $b_2=2a_2=2a_1+2d$, $b_3=a_3-6=a_1+2d-6$.

因为 $S_4=32$, $T_3=16$,

所以$\begin{cases}4a_1+6d=32,\\(a_1-6)+(2a_1+2d)+(a_1+2d-6)=16,\end{cases}$

整理得$\begin{cases}2a_1+3d=16,\\a_1+d=7,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=5,\\d=2,\end{cases}$

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n+3$.

(2)【证明】由(1)知 $a_n=2n+3$,所以

$$S_n=\frac{n[5+(2n+3)]}{2}=n^2+4n,$$

$$b_n=\begin{cases}2n-3, n\text{ 为奇数},\\4n+6, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

当 n 为奇数时,$T_n=-1+14+3+22+7+30+\cdots+(2n-7)+(4n+2)+2n-3$

$=[-1+3+\cdots+(2n-7)+(2n-3)]+[14+22+\cdots+(4n+2)]$

$$=\frac{\frac{n+1}{2}(-1+2n-3)}{2}+\frac{\frac{n-1}{2}(14+4n+2)}{2}$$

$$=\frac{3n^2+5n-10}{2}.$$

当 $n>5$ 时,$T_n-S_n=\frac{3n^2+5n-10}{2}-(n^2+4n)=\frac{n^2-3n-10}{2}=\frac{(n-5)(n+2)}{2}>0$,

所以 $T_n>S_n$.

当 n 为偶数时,$T_n=-1+14+3+22+7+30+\cdots+(2n-5)+(4n+6)$

$=[-1+3+\cdots+(2n-5)]+[14+22+\cdots+(4n+6)]$

$$=\frac{\frac{n}{2}(-1+2n-5)}{2}+\frac{\frac{n}{2}(14+4n+6)}{2}$$

$$=\frac{3n^2+7n}{2}.$$

当 $n>5$ 时,$T_n-S_n=\frac{3n^2+7n}{2}-(n^2+4n)=\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}>0$,

所以 $T_n>S_n$.

综上可知,当 $n>5$ 时,$T_n>S_n$.

一题多解 (2)由(1)知 $a_n=2n+3$.

所以 $S_n=\frac{n[5+(2n+3)]}{2}=n^2+4n$,

$b_n=\begin{cases}2n-3, n\text{ 为奇数},\\4n+6, n\text{ 为偶数},\end{cases}$ $b_{2n-1}+b_{2n}=12n+1$.

当 n 为偶数时,$T_n=12\times1+1+12\times2+1+\cdots+12\times\frac{n}{2}+1$

$$=12\times\frac{\left(1+\frac{n}{2}\right)\cdot\frac{n}{2}}{2}+\frac{n}{2}$$

$=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n.$

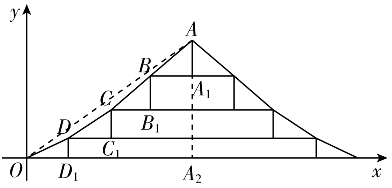
当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n-(n^2+4n)=\frac{n(n-1)}{2}>0.$

当 n 为奇数时，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\frac{3}{2}(n+1)^2+\frac{7}{2}(n+1)-4n-10=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5.$

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5-(n^2+4n)=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n-5=\frac{1}{2}(n+2)(n-5)>0.$

综上可知，当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

12. D 【解析】如图，连接 OA，延长 AA_1 与 x 轴交于点 A_2，则 $OA_2=4OD_1$.



因为 k_1,k_2,k_3 成公差为 0.1 的等差数列，所以 $k_1=k_3-0.2$，$k_2=k_3-0.1$，所以 $CC_1=DC_1(k_3-0.2)$，$BB_1=CB_1(k_3-0.1)$，$AA_1=k_3BA_1$，即 $CC_1=OD_1(k_3-0.2)$，$BB_1=OD_1(k_3-0.1)$，$AA_1=k_3OD_1$.

关键点 利用等差数列的性质，将各条线段用 k_3 和 OD_1 表示出来

又 $\frac{DD_1}{OD_1}=0.5$，所以 $DD_1=0.5OD_1$，所以 $AA_2=0.5OD_1+OD_1(k_3-0.2)+OD_1(k_3-0.1)+k_3OD_1=OD_1(3k_3+0.2)$. 所以 $\tan\angle AOA_2=\frac{AA_2}{OA_2}=\frac{OD_1(3k_3+0.2)}{4OD_1}=0.725$，解得 $k_3=0.9$，**故选** D.

13. 23 $\frac{115}{2}$ 【解析】设升量器的高为 h_1，底面半径为 r_1，容积为 V_1，斗量器的高为 h_2，底面半径为 r_2，容积为 V_2，斛量器的高为 h_3，底面半径为 r_3，容积

为 V_3，则 $r_1=\frac{65}{2}$ mm，$r_2=\frac{325}{2}$ mm，$r_3=\frac{325}{2}$ mm，$h_3=230$ mm，

$V_1=\pi r_1^2h_1=\left(\frac{65}{2}\right)^2\pi h_1(\text{mm}^3)$，$V_2=\pi r_2^2h_2=\left(\frac{325}{2}\right)^2\pi h_2(\text{mm}^3)$，$V_3=\pi r_3^2h_3=\left(\frac{325}{2}\right)^2\times230\pi(\text{mm}^3)$.

$\because V_1,V_2,V_3$ 成等比数列且公比 $q=10$，

$\therefore V_1\cdot q^2=V_3$，即 $\left(\frac{65}{2}\right)^2\pi\cdot h_1\cdot100=\left(\frac{325}{2}\right)^2\times230\pi$，解得 $h_1=\frac{115}{2}$ mm，$V_2\cdot q=V_3$，即 $\left(\frac{325}{2}\right)^2\pi\cdot h_2\cdot10=\left(\frac{325}{2}\right)^2\times230\pi$，解得 $h_2=23$ mm. $\therefore$ 斗量器的高 $h_2=23$ mm，升量器的高 $h_1=\frac{115}{2}$ mm.

14. 5　$240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$

思路导引　对折 n 次可以得到不同规格的图形的种数为数列 $\{a_n\}\xrightarrow{\text{根据前几项，归纳}}a_n$；对折 n 次可以得到不同规格的图形的面积之和为 $\{S_n\}\xrightarrow{\text{根据前几项，归纳}}S_n\xrightarrow[\text{求和}]{\text{错位相减法}}\sum_{k=1}^{n}S_k$.

【解析】记对折 n 次可以得到不同规格图形的种数为数列 $\{a_n\}$，依题意有 $a_1=2$，$a_2=3$，对折 3 次，可以得到 2.5 dm×12 dm，5 dm×6 dm，10 dm×3 dm，20 dm×1.5 dm 四种规格的图形，即 $a_3=4$；对折 4 次，可以得到 1.25 dm×12 dm，2.5 dm×6 dm，5 dm×3 dm，10 dm×1.5 dm，20 dm×0.75 dm 五种规格的图形，即 $a_4=5$. 于是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+1$. 记对折 n 次可以得到不同规格图形的面积之和为 $\{S_n\}$，依题意有 $S_1=2\times120=240$，

$S_2=3\times60=180,S_3=4\times30=120,S_4=5\times15=75$,于是数列$\{S_n\}$的通项公式为

$S_n=120(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

则$\sum_{k=1}^{n}S_k=120\left[2\times1+3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2^2}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^{n-2}}+(n+1)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right]$,所以$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}S_k=120\left[2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2^2}+4\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+(n+1)\cdot\frac{1}{2^n}\right]$,

两式作差得,

$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}S_k=120\left[2\times1+1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2^2}+1\times\frac{1}{2^3}+\cdots+1\times\frac{1}{2^{n-1}}-(n+1)\cdot\frac{1}{2^n}\right]=120\left[2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-(n+1)\cdot\frac{1}{2^n}\right]=120\left[3-\frac{1}{2^{n-1}}-(n+1)\cdot\frac{1}{2^n}\right]=120\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$,所以$\sum_{k=1}^{n}S_k=240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$.

15. (1)【解】满足题意的(i,j)为$(1,2)$,$(1,6)$,$(5,6)$.

(2)【证明】因为在公差不为0的等差数列$\{a_n\}$中,a_p,a_q,a_m,a_n成等差数列$\Leftrightarrow p,q,m,n$成等差数列,

当$m>3$时,$a_{15},a_{16},\cdots,a_{4m+2}$可连续4项为一组等差数列,

故需证明序号为1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14的项可分成三组项数为4的等差数列,易知分为(1,4,7,10),(3,6,9,12),(5,8,11,14)三组满足题意,所以当$m\geqslant3$时,数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是(2,13)-可分数列.

素养上分

1. 4 072 【解析】因为$a_n=\log_{n+1}(n+2)$$(n\in\mathbf{N}_+)$,$a_1a_2\cdots a_k$为整数,所以$\log_2 3\times\log_3 4\times\cdots\times\log_k(k+1)\times\log_{k+1}(k+$

$2)=\log_2(k+2)$为整数$(k\in\mathbf{N}_+)$.

设$\log_2(k+2)=m$, $m\in\mathbf{Z}$,则 $k+2=2^m$, $k=2^m-2$.

易知 $2^{11}-2=2\ 046$,所以 $k\in[1,2\ 046]$内所有的“理想数”为 2^2-2, 2^3-2, 2^4-2, $\cdots$, $2^{10}-2$, $2^{11}-2$,

其和为 $2^2-2+2^3-2+2^4-2+\cdots+2^{10}-2+2^{11}-2=\dfrac{4\times(1-2^{10})}{1-2}-20=4\ 072$.

2. $\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{2^{n+1}+1}$ 【解析】由 $A_1A_2=\sqrt{2}$,可得折线 $A_1A_3A_2$ 的长为2,即 $a_1=2$.

由龙曲线的性质可知,每个题图上实线的长为虚线的长的$\sqrt{2}$倍,即每一代龙曲线的长度为其前一代龙曲线的长度的$\sqrt{2}$倍,即 $a_n=\sqrt{2}a_{n-1}(n\geqslant 2)$,所以数列$\{a_n\}$是以2为首项,$\sqrt{2}$为公比的等比数列,$a_n=2\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

由数列$\{a_n\}$的通项公式可得 $a_{2n-1}=(\sqrt{2})^{2n}=2^n$, $a_{2n+1}=(\sqrt{2})^{2n+2}=2^{n+1}$,则

$$\frac{2^{n+1}}{(a_{2n-1}+1)(a_{2n+1}+1)}=\frac{2^{n+1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{2\cdot 2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=2\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right),$$

所以 $S_n=2\left(\dfrac{1}{2+1}-\dfrac{1}{4+1}\right)+2\left(\dfrac{1}{4+1}-\dfrac{1}{8+1}\right)+\cdots+2\left(\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)$,

即 $S_n=2\left(\dfrac{1}{2+1}-\dfrac{1}{4+1}+\dfrac{1}{4+1}-\dfrac{1}{8+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)=2\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{2^{n+1}+1}$.

3. BCD 【解析】若 $\lambda=0$,则$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{-2n}{n+1}<0$,由 $a_1=1$,可得数列$\{a_n\}$的项正负交替,**故 B,D 正确**.

若 $\lambda>0$,令$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\lambda n^2-2n}{n+1}>1$,即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$,

当 $a_{n+1}>a_n$ 时,即 $\lambda n^2-2n>n+1$ 成立,

即 $\lambda>\dfrac{3n+1}{n^2}$成立,显然存在正整数 N,

当 $n\geqslant N$ 时,$a_{n+1}>a_n$ 恒成立,C **正确**.

当 $\lambda>0$ 时,$y=\lambda n^2-2n$ 是关于 n 的二次函数式,$y=n+1$ 是关于 n 的一次函数式,故当 $n\to+\infty$ 时,有 $\lambda n^2-2n>n+1$,即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$,

而当 $\lambda=0$ 时,数列 $\{a_n\}$ 的项正负交替,

故不存在 λ,使存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,$a_{n+1}<a_n$ 恒成立,**故 A 错误**.

故选 BCD.

4.【解】因为 $a_1=\sqrt{2}$,$a_{n+1}=[a_n]+\dfrac{1}{\{a_n\}}$,

所以 $a_2=[a_1]+\dfrac{1}{\{a_1\}}=[a_1]+\dfrac{1}{a_1-[a_1]}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$,

同理,$a_3=3+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=4+\sqrt{2}$,

猜想:$a_n=2(n-1)+\sqrt{2}(n\in\mathbf{N}_+)$.

①当 $n=1$ 时,$a_1=\sqrt{2}$成立.

②假设当 $n=k$ 时猜想成立,即 $a_k=2(k-1)+\sqrt{2}(k\in\mathbf{N}_+)$,则当 $n=k+1$ 时,

$a_{k+1}=[a_k]+\dfrac{1}{\{a_k\}}=[a_k]+\dfrac{1}{a_k-[a_k]}=2k-1+\dfrac{1}{2(k-1)+\sqrt{2}-(2k-1)}=2k-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=2k+\sqrt{2}=2[(k+1)-1]+\sqrt{2}$,

所以当 $n=k+1$ 时,猜想成立.

综上,对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$,都有 $a_n=2(n-1)+\sqrt{2}$成立,$a_n-a_{n-1}=2(n-1)+\sqrt{2}-2(n-2)-\sqrt{2}=2(n\geqslant2)$,故数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2,首项为 $\sqrt{2}$ 的等差数列,则 $\sum\limits_{k=1}^{2\,024}a_k=2\,024\times\sqrt{2}+\dfrac{2\,024\times2\,023}{2}\times2=2\,024(\sqrt{2}+2\,023)$.

第一章 全章上分

1. B 【解析】因为数列$\{a_n\}$为等差数列

且 $a_2+a_4+a_6=39$,所以 $3a_4=39$,

提示：等差中项的性质

解得 $a_4=13$,又公差 $d=-2$,

所以 $a_5=a_4+d=a_4-2=11$.

故选 B.

2. D 【解析】由 $a_1=2,a_{n+1}+a_n=11$,

可得 $a_2=9,a_3=2,a_4=9,a_5=2,a_6=9,\cdots$,

所以数列$\{a_n\}$的奇数项为 2,

偶数项为 9,所以 $a_{30}=9$.

故选 D.

3. C 【解析】由 $S_9=S_{19}$,可得 $a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{19}=0$,由等差数列的性质,可得 $5(a_{14}+a_{15})=0$.

又因为 $a_1<0$,所以等差数列$\{a_n\}$的公差 $d>0$,即等差数列$\{a_n\}$为递增数列,

故 $a_{14}<0,a_{15}>0$,即 S_n 取最小值时,n 的值为 14. **故选** C.

快解 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由等差数列的前 n 项和的性质可知,S_n 可看作是关于 n 的二次函数,$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$,由题易知 $d>0$,抛物线开口向上,又 $S_9=S_{19}$,所以抛物线对称轴方程为 $n=14$,即 $n=14$ 时,S_n 取最小值,**故选** C.

4. A 【解析】由题意,显然数列$\{a_n\}$首项不为 0 且公比不为 1,由 $S_2=2,S_4=10$,可得
$$\begin{cases}\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}=2,\\ \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=10,\end{cases}$$

两式相除可得 $\frac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=5$,因为$\{a_n\}$为正项等比数列,即 $q>0$,所以

$q=2$. **故选** A.

5. C 【解析】设大鼠第 n 天打洞 a_n 尺,小鼠第 n 天打洞 b_n 尺,其中 $n\in\mathbf{N}_+$,

则数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1,公比为 2 的等比数列,$a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$,

数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,$b_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}$.

设数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则

$$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2^n-\frac{1}{2^n},$$

易知数列 $\{S_n\}$ 为递增数列,因为 $S_4=16-\frac{1}{16}<16$, $S_5=32-\frac{1}{32}>16$,所以两鼠相遇至少需要 5 天. **故选** C.

6. B 【解析】因为 $S_n=3a_n-2$,所以当 $n=1$ 时,$S_1=3a_1-2$,解得 $a_1=1$.

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=3a_n-2-(3a_{n-1}-2)=3a_n-3a_{n-1}$,所以 $a_n=\frac{3}{2}a_{n-1}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为公比,1 为首项的等比数列,所以 $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. 若 $\frac{3}{2}\lambda a_n\geqslant3\log_{\frac{3}{2}}a_n+4$ 对任意的正整数 n 恒成立,则 $\lambda\geqslant(3n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 对任意的正整数 n 恒成立,所以 $\lambda\geqslant\left[(3n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]_{\max}$.

提示:将恒成立问题转化成最值问题

令 $b_n=(3n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n(n\in\mathbf{N}_+)$,则 $b_{n+1}-b_n=(3n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-(3n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(-n+\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

所以当 $n\geqslant2$ 时,$b_{n+1}-b_n=\left(-n+\frac{5}{3}\right)\cdot$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n<0$，所以 $b_{n+1}<b_n(n\geqslant2)$，所以

对任意正整数 $n\geqslant2$，$b_n\leqslant b_2=\frac{28}{9}$，

又 $b_1=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}<\frac{28}{9}$，所以 $\lambda\geqslant$

$\left[(3n+1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]_{\max}=\frac{28}{9}$，

所以实数 λ 的最小值为$\frac{28}{9}$. **故选 B.**

7. BCD 【解析】当 $n=1$ 时，$2a_1=1$，故

$a_1=\frac{1}{2}$.

当 $n\geqslant2$ 时，由 $2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^na_n=n$，得 $2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=n-1$，

两式作差得 $2^na_n=1$，

即 $a_n=\frac{1}{2^n}$，$n\geqslant2$，

当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{1}{2}$，满足 $a_n=\frac{1}{2^n}$，所以

$a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}a_n$，**故 A 错误；**

由 A 分析可得，$\log_2a_n-\log_2a_{n-1}=\log_2\frac{1}{2^n}-\log_2\frac{1}{2^{n-1}}=-n+(n-1)=-1$

$(n\geqslant2)$，故$\{\log_2a_n\}$是等差数列，**故 B 正确；**

$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}=1-a_n$，**故 C 正确；**

因为 $y=\frac{1}{2^x}$是减函数，所以 $a_n=\frac{1}{2^n}$递减，即数列$\{a_n\}$为递减数列，**故 D 正确. 故选 BCD.**

8. ABC 【解析】对于 A，小于或等于 15 且与 15 互质的数有 1，2，4，7，8，11，13，14，所以 $\varphi(15)=8$，又由 $\varphi(3)=2$，$\varphi(5)=4$，所以 $\varphi(15)=\varphi(3)\varphi(5)$，**故 A 正确；**

对于 B，质数 p 的因数只有 1 和 p，所

以从 1 到 $p-1$ 的所有的数均与 p 互质，所以当 n 为质数时，$\varphi(n)=n-1$，**故 B 正确；**

对于 C，因为 2 是质数，所以在不超过 2^n 的整数中，所有的偶数的个数为 2^{n-1}，根据欧拉函数的定义可得 $\varphi(2^n)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，则 $\varphi(2^n)=2\varphi(2^{n-1})(n\geqslant 2)$，又 $\varphi(2)=1$，所以数列 $\{\varphi(2^n)\}$ 是等比数列，**故 C 正确；**

对于 D，因为 100 是偶数，小于 100 的正奇数有 50 个，其中是 5 的倍数的奇数有 10 个，它们与 100 不互质，所以 $\varphi(100)=40$，**故 D 不正确. 故选 ABC.**

9. $\begin{cases}4, n=1,\\ 4n-1, n\geqslant 2\end{cases}$ **【解析】**当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+n+1-[2(n-1)^2+(n-1)+1]=4n-1$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=4$ 不满足上式，

则 $a_n=\begin{cases}4, n=1,\\ 4n-1, n\geqslant 2.\end{cases}$

10. 101　5 000 **【解析】**因为 $a_{n+2}-a_n=2$，且 $a_1=-1$，$a_2=3$，所以 $\{a_n\}$ 的奇数项、偶数项分别构成等差数列.

奇数项以 -1 为首项，2 为公差，偶数项以 3 为首项，2 为公差，

所以 $a_n=\begin{cases}n-2, n \text{ 为奇数},\\ n+1, n \text{ 为偶数},\end{cases}$ 所以 $a_{100}=101$，前 100 项和为 $\dfrac{(-1+97)\times 50}{2}+\dfrac{(3+101)\times 50}{2}=5\ 000$.

11.【解】(1) 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，设其公差为 d，

由题知 $\begin{cases}a_3+a_4=2a_1+5d=3,\\ S_7=7a_1+21d=14,\end{cases}$ 解得 $a_1=-1$，$d=1$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n-2$.

(2) 由 (1) 知 $b_n=2^{n-2}+2(n-2)=\dfrac{2^n}{4}+$

$2n-4$，所以 $T_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{2-2^{n+1}}{1-2}+\frac{(-2+2n-4)\cdot n}{2}=2^{n-1}-\frac{1}{2}+n^2-3n.$

12.（1）【解】设 $K_n=a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}=\frac{n^2+n}{4}.$

当 $n=1$ 时，$a_1=K_1=\frac{1^2+1}{4}=\frac{1}{2}.$

当 $n\geqslant 2$ 时，$K_n-K_{n-1}=\frac{a_n}{n}=\frac{n^2+n}{4}-\frac{(n-1)^2+n-1}{4}$，化简得 $\frac{a_n}{n}=\frac{n^2+n-(n^2-2n+1+n-1)}{4}=\frac{2n}{4}=\frac{n}{2}$，故 $a_n=\frac{n^2}{2}.$

当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{1}{2}$，符合上式. 因此，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n^2}{2}.$

（2）（ⅰ）【解】设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=nb_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$

由题知数列 $\{T_n-a_n\}$ 为等差数列，其通项 $T_n-a_n=nb_1+\frac{n(n-1)}{2}d-\frac{n^2}{2}=\left(\frac{d}{2}-\frac{1}{2}\right)n^2+\left(b_1-\frac{d}{2}\right)n.$

由等差数列的性质可知，等差数列的通项应为关于 n 的一次函数，故二次项系数必须为零，即 $\frac{d}{2}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow d=1.$

（ⅱ）【证明】$b_n=b_1+(n-1)\times 1=n+b_1-1$，

易知数列 $\{c_n\}$ 满足 $b_{n+2}c_{n+1}=b_nc_n$，

所以 $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{b_n}{b_{n+2}}$，

所以 $\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}(n\geqslant 2)$，

故 $c_n=\frac{c_n}{c_{n-1}}\cdot\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{c_3}{c_2}\cdot\frac{c_2}{c_1}\cdot c_1=$

$\frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}\cdot\frac{b_{n-2}}{b_n}\cdot\frac{b_{n-3}}{b_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_4}\cdot\frac{b_1}{b_3}\cdot c_1=\frac{b_1b_2c_1}{b_nb_{n+1}}$，$n\geqslant2$，当 $n=1$ 时，将 c_1 代入上式成立，所以 $c_n=\frac{b_1b_2c_1}{b_nb_{n+1}}$，

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_n=c_1\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_1b_2}{b_kb_{k+1}}=b_1b_2c_1\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{b_kb_{k+1}}$.

由于 $b_k=b_1+k-1$，则 $\frac{1}{b_kb_{k+1}}=\frac{1}{(b_1+k-1)(b_1+k)}=\frac{1}{b_1+k-1}-\frac{1}{b_1+k}$，

则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{b_kb_{k+1}}=\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_1+1}\right)+\left(\frac{1}{b_1+1}-\frac{1}{b_1+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{b_1+n-1}-\frac{1}{b_1+n}\right)=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_1+n}$.

因此，$c_1+c_2+\cdots+c_n=b_1b_2c_1\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_1+n}\right)=b_2c_1\left(1-\frac{b_1}{b_1+n}\right)$，

因为 $\frac{b_1}{b_1+n}>0$，所以 $1-\frac{b_1}{b_1+n}<1$，则 $c_1+c_2+\cdots+c_n<b_2c_1$.

故原命题得证.

13.【解】（1）$\because a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$，$\therefore \frac{a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1(n\in\mathbf{N}_+)$，

又 $\frac{1}{a_1}=1$，$\therefore\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列，其首项为 1，公差为 1.

$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\times1=1+n-1=n$，

$\therefore a_n=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}_+)$.

（2）由 $\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant a_k=\frac{1}{k}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，得 $2^{n-1}<k\leqslant2^n(n\in\mathbf{N}_+)$，

$\because 2^n-(2^{n-1}+1)+1=2^{n-1}$，$\therefore$ 满足不等式的正整数 k 的个数为 2^{n-1}，

$\therefore b_n=2^{n-1},\dfrac{b_n}{a_n}=n\cdot 2^{n-1}$,

$S_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}$①,

$2S_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$②,

①−②得,$-S_n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=\dfrac{1\times(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^n=(1-n)\cdot 2^n-1$,

$\therefore S_n=(n-1)\cdot 2^n+1$.

(3)由已知可得 $c_n=\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 2^n+1-S_n}+1=1+(-1)^n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

当 n 为奇数时,$c_n=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<1$,此时数列 $\{c_n\}$ 为递增数列,$\therefore$ 当 $n=1$ 时,c_n 取最小值 $c_1=\dfrac{1}{2}$,此时 $\dfrac{1}{2}\leqslant c_n<1$.

当 n 为偶数时,$c_n=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n>1$,此时数列 $\{c_n\}$ 为递减数列,$\therefore$ 当 $n=2$ 时,c_n 取最大值 $c_2=\dfrac{5}{4}$,此时 $1<c_n\leqslant\dfrac{5}{4}$.

综上,$\dfrac{1}{2}\leqslant c_n\leqslant\dfrac{5}{4}$ 且 $c_n\neq 1$,

$\therefore\begin{cases}2\lambda-3<\dfrac{1}{2},\\ \lambda>\dfrac{5}{4},\end{cases}$ 解得 $\dfrac{5}{4}<\lambda<\dfrac{7}{4}$.

故实数 λ 的取值范围为 $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4}\right)$.